Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Markus Schweighofer
Aaron Kunert / Sven Wagner

Wintersemester 2009/2010
Lösungsblatt 8
13.01.2010

Lineare Algebra I

Lösung 8.1:

Vorausssetzung: Sei K ein Körper. Sei I eine Menge, und sei für jedes $i \in I$ ein K-Vektorraum $(V_i, +_i, \cdot_i)$ gegeben.

Behauptung: Das direkte Produkt $\prod\limits_{i \in I} V_i$ der abelschen Gruppen $(V_i, +_i)$ wird vermöge der Skalarmultiplikation

$$\cdot : K \times \prod_{i \in I} V_i \longrightarrow \prod_{i \in I} V_i, \quad (\lambda, v) \longmapsto \big(i \mapsto \lambda \cdot_i v(i)\big)$$

zu einem K-Vektorraum.

Beweis: Seien $\lambda, \mu \in K$ und $v, w \in V := \prod\limits_{i \in I} V_i$, alle beliebig gewählt.
Wir zeigen zuerst, dass $\lambda(v + w) = \lambda v + \lambda w$ gilt. Sei dafür $i \in I$ beliebig gewählt. Dann gilt nach Definition und den Vektorraumeigenschaften von V_i:

$$\begin{aligned}(\lambda(v + w))(i) &= \lambda \cdot_i (v + w)(i) = \lambda \cdot_i (v(i) +_i w(i)) = \lambda \cdot_i v(i) +_i \lambda \cdot_i w(i) \\ &= (\lambda v)(i) +_i (\lambda w)(i) = (\lambda v + \lambda w)(i).\end{aligned}$$

Nun zeigen wir $(\lambda + \mu)v = \lambda v + \mu v$. Sei wieder $i \in I$. Dann ist

$$((\lambda + \mu)v)(i) = (\lambda + \mu) \cdot_i v(i) = \lambda \cdot_i v(i) +_i \mu \cdot_i v(i) = (\lambda v)(i) +_i (\mu v)(i) = (\lambda v + \mu v)(i).$$

Als nächsten überprüfen wir, ob $1v = v$ ist. Dazu sei $i \in I$. Wir rechnen nach:

$$(1v)(i) = 1 \cdot_i v(i) = v(i).$$

Zuletzt müssen wir noch zeigen, dass $(\lambda\mu)v = \lambda(\mu v)$ gilt. Sei $i \in I$. Dann gilt:

$$((\lambda\mu)v)(i) = (\lambda\mu) \cdot_i v(i) = \lambda \cdot_i (\mu \cdot_i v(i)) = \lambda \cdot_i (\mu v)(i) = (\lambda(\mu v))(i).$$

Lösung 8.2:

(a) Man sieht sofort, dass der dritte Vektor im Spann der beiden ersten Vektoren liegt. Somit kann man ihn auch weglassen. Weiter sieht man, dass der Spann der beiden ersten Vektoren gerade die Lösungsmenge des homogenen Gleichungssystems $Ax = 0$ ist, wenn man A wie in Aufgabe 7.4 (c) wählt (vgl. Musterlösung). In der Vorlesung wurde gezeigt, dass die Basislösungen, die man aus der reduzierten Zeilenform herauslesen kann, eine Basis des Lösungsraumes, also des Kerns dieser Matrix, bilden. Somit sind, wegen Aufgabe 7.4 (c), die beiden ersten Vektoren schon eine Basis des Lösungsraumes.

(b) Wir verwenden einen Satz aus der Vorlesung: Seien A, B Matrizen über K mit jeweils n Spalten. Dann gilt genau dann $\ker A = \operatorname{row} B$, wenn $\operatorname{row} A = \ker B$ gilt.
Sei B die Matrix, deren Zeilen die gegebenen Vektoren sind. Nach dem Satz genügt es, das Gleichungssystem $Bx = 0$ zu lösen und die gefundenen Basislösungen als Zeilen der gesuchten Matrix A zu nehmen. Dies tun wir nun:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix} \begin{array}{lcl} z_2 & \leftarrow & z_2 - 2z_1 \\ z_3 & \leftarrow & z_3 - 3z_1 \\ z_4 & \leftarrow & z_4 - 4z_1 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & -2 & -4 & -6 \\ 0 & -3 & -6 & -9 \end{pmatrix} \begin{array}{lcl} z_1 & \leftarrow & z_1 + 2z_2 \\ z_2 & \leftarrow & (-1)z_2 \\ z_3 & \leftarrow & z_3 - 2z_2 \\ z_4 & \leftarrow & z_4 - 3z_2 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Die Lösungsmenge davon wird von den Vektoren

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

erzeugt. Somit können wir die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

nehmen. Wir benötigen nun noch eine Basis des Kerns dieser Matrix. Dafür bringen wir die Matrix in reduzierte Zeilenstufenform, da wir daraus, wie in der Vorlesung beschrieben, eine Basis des Lösungsraums des zugehörigen homogenen Gleichungssystems (also des Kerns der Matrix) ablesen können:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad z_2 \leftarrow z_2 - 2z_1$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad z_1 \leftarrow z_1 + 2z_2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Somit erhalten wir als Basisvektoren des Kerns, also auch des ursprünglich betrachteten Spanns:

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(c) Wir gehen hier wie in der letzten Teilaufgabe vor. Zunächst suchen wir für jeden der beiden Spänne ein homogenes Gleichungssystem, das diesen als Lösungsraum hat. Wir beginnen mit dem ersten Spann.

$$\begin{pmatrix} 1 & \pi & 3 & \pi^2 & 5 \\ -\pi & 0 & \frac{\pi^2}{2} & 4-\pi^3 & -2\pi \\ 2 & -\pi^2 & -4\pi-\frac{\pi^2}{2} & -\frac{8}{\pi}-3+2\pi^2 & 4-3\pi \\ 1 & 2\pi & 6+\frac{\pi}{2} & \frac{4}{\pi}+\pi^2 & 8 \end{pmatrix} \begin{array}{lcl} z_2 & \leftarrow & z_2+\pi z_1 \\ z_3 & \leftarrow & z_3-2z_1 \\ z_4 & \leftarrow & z_4-z_1 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \pi & 3 & \pi^2 & 5 \\ 0 & \pi^2 & \frac{\pi^2}{2} & 4-\pi^3 & -2\pi \\ 0 & -2\pi-\pi^2 & -6-4\pi-\frac{\pi^2}{2} & -\frac{8}{\pi}-3 & -6-3\pi \\ 0 & \pi & 3+\frac{\pi}{2} & \frac{4}{\pi} & 3 \end{pmatrix} \begin{array}{lcl} z_1 & \leftarrow & z_1-\frac{1}{\pi}z_2 \\ z_2 & \leftarrow & \frac{1}{\pi^2}z_2 \\ z_3 & \leftarrow & z_3-\frac{2+\pi}{\pi}z_2 \\ z_4 & \leftarrow & z_4-\frac{1}{\pi}z_2 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{\pi}{2} & \pi^2-\frac{4}{\pi} & 2 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2}+\frac{3}{\pi} & \frac{4}{\pi^2} & \frac{3}{\pi} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{lcl} z_1 & \leftarrow & z_1-(\pi^2-\frac{4}{\pi})z_3 \\ z_2 & \leftarrow & z_2-\frac{4}{\pi^2}z_3 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{\pi}{2} & 0 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2}+\frac{3}{\pi} & 0 & \frac{3}{\pi} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Der Kern dieser Matrix wird erzeugt durch die Vektoren

$$\begin{pmatrix} \frac{\pi}{2} \\ -\frac{1}{2}-\frac{3}{\pi} \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} -2 \\ -\frac{3}{\pi} \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Wir können für den ersten Spann also die folgende Matrix wählen:

$$A_1 := \begin{pmatrix} \frac{\pi}{2} & -\frac{1}{2}-\frac{3}{\pi} & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -\frac{3}{\pi} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Wir machen weiter mit dem zweiten Spann.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & \frac{5}{\pi} & 3\pi^2 & \frac{9}{\pi} \\ 2 & 7 & \frac{10}{\pi}+4\pi & 7\pi^2 & \frac{21}{\pi} \\ \frac{\pi}{2} & \frac{\pi}{2} & \frac{7}{2}-4\pi^2 & \frac{\pi^3}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \begin{array}{lcl} z_2 & \leftarrow & z_2-2z_1 \\ z_3 & \leftarrow & z_3-\frac{\pi}{2}z_1 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & \frac{5}{\pi} & 3\pi^2 & \frac{9}{\pi} \\ 0 & 1 & 4\pi & \pi^2 & \frac{3}{\pi} \\ 0 & -\pi & 1-4\pi^2 & -\pi^3 & -3 \end{pmatrix} \begin{array}{lcl} z_1 & \leftarrow & z_1 - 3z_2 \\ z_3 & \leftarrow & z_3 + \pi z_2 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{5}{\pi} - 12\pi & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4\pi & \pi^2 & \frac{3}{\pi} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{lcl} z_1 & \leftarrow & z_1 - (\frac{5}{\pi} - 12\pi)z_3 \\ z_2 & \leftarrow & z_2 - 4\pi z_3 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \pi^2 & \frac{3}{\pi} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Der Kern dieser Matrix wird erzeugt durch die Vektoren

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -\pi^2 \\ 01 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{3}{\pi} \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Wir können für den zweiten Spann also die folgende Matrix wählen:

$$A_2 := \begin{pmatrix} 0 & -\pi^2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{\pi} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Hängt man die beiden Gleichungssysteme $A_1x = 0$ und $A_2x = 0$ hintereinander und betrachten die Lösungsmenge des daraus resultierenden Gleichungssystems, so erhält man gerade den Schnitt der beiden Lösungsmengen der einzelnen Gleichungssysteme, also die angegebene Menge. Eine gesuchte Matrix ist also:

$$A := \begin{pmatrix} \frac{\pi}{2} & -\frac{1}{2} - \frac{3}{\pi} & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -\frac{3}{\pi} & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\pi^2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{\pi} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Wir berechnen die reduzierte Zeilenstufenform dieser Matrix. Dabei beginnen wir mit dem Abziehen der letzten Zeile von der zweiten Zeile, die wir dann noch durch -2 dividieren und mit der ersten Zeile vertauschen.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\pi}{2} & -\frac{1}{2} - \frac{3}{\pi} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\pi^2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{\pi} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{lcl} z_3 & \leftarrow & z_2 - \frac{\pi}{2} z_1 \\ z_2 & \leftarrow & -\frac{1}{\pi^2} z_3 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{\pi^2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} - \frac{3}{\pi} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{\pi} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{lcl} z_3 & \leftarrow & z_3 + (\frac{1}{2} + \frac{3}{\pi}) z_2 \\ z_4 & \leftarrow & z_4 + \frac{3}{\pi} z_2 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{\pi^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2\pi^2} - \frac{3}{\pi^3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{3}{\pi^3} & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{lcl} z_2 & \leftarrow & z_2 - \frac{\pi}{3})z_4 \\ z_3 & \leftarrow & z_3 - (\frac{\pi}{6} + 1)z_4 \\ z_4 & \leftarrow & -\frac{3}{\pi^3} z_4 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{\pi}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{\pi}{6} - 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{\pi^3} \end{pmatrix}$$

Eine Basis des Kerns dieser Matrix bildet damit der Vektor

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\pi}{3} \\ \frac{\pi}{6} + 1 \\ \frac{3}{\pi^3} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Lösung 8.3:

(a) Wir wissen schon, dass $(\mathbb{C}, +)$ eine abelsche Gruppe und $\mathbb{R}$ ein Körper ist. Daher müssen wir noch die Axiome $(\vec{D}, D', \vec{N}, V)$ nachprüfen. Seien dazu $v \in \mathbb{C}$. Die Axiome $\vec{D}$ und D' entsprechen aber gerade den Distributivgesetzen in $\mathbb{C}$ (Beachte $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$). Sicherlich gilt $1_{\mathbb{R}} \cdot v = v$, da die 1 in $\mathbb{R}$ mit der 1 in $\mathbb{C}$ übereinstimmt. Die Veträglichkeit (V) ist gleichbedeutend mit der Assoziativität der Multiplikation im Körper $\mathbb{C}$. Bleibt zu zeigen, dass $(1, \mathring{\imath})$ eine Basis von $\mathbb{C}$ als $\mathbb{R}$–Vektorraum ist. Sicher ist $(1, \mathring{\imath})$ ein Erzeugendensystem von $\mathbb{C}$, denn jede komplexe Zahl z lässt sich schreiben als $z = a + b\mathring{\imath}$ mit $a, b \in \mathbb{R}$. Auf der anderen Seite ist aus der Vorlesung bekannt, dass aus der Gleichung $a + b\mathring{\imath} = 0$ sofort $a = b = 0$ folgt, was bedeutet, dass $\{1, \mathring{\imath}\}$ linear unabhängig

(b) Zuerst zeigen wir, dass $K[X]_d$ ein K–Vektorraum ist. In der Vorlesung wurde schon gezeigt, dass $K[X]$ ein K–Vektorraum ist. Nach einer Proposition aus der Vorlesung genügt es also zu zeigen, dass 0 in $K[X]_d$ liegt und $K[X]_d$ abgeschlossen unter Addition und Skalarmultiplikation ist. Sind $f, g \in K[X]_d$ und $\lambda \in K^\times$ so gilt, $\deg(f + g) \leq \max(\deg(f), \deg(g)) \leq d$. Also ist $f + g \in K[X]_d$. Weiter ist $\deg \lambda f = \deg \lambda + \deg f = \deg f \leq d$. Damit ist auch $\lambda f \in K[X]_d$. Nun ist gezeigt, dass $K[X]_d$ ein Vektorraum ist. Eine Basis des $K[X]_d$ ist für $d \leq 0$ gegeben durch

$$(1, x, x^2, \ldots, x^d).$$

Nach Definition des Polynomrings ist diese Menge linear unabhängig und erzeugt auch offensichtlich ganz $K[X]_d$. Ist $d = -\infty$, so ist $K[X]_d = (0)$ der Nullvektorraum. Dieser hat definitionsgemäß die Basis $\varnothing$.

(c) Wir haben schon früher gezeigt, dass $(\mathcal{P}(M), \triangle)$ eine abelsche Gruppe ist. Es bleibt nur noch eine passende Skalarmultiplikation zu konstruieren. Um das Axiom N zu gewährleisten muss $1 \cdot A$ für alle $A \subseteq M$ gelten. Weiter haben wir oben gesehen, dass stets $0 \cdot A = 0 = \varnothing$ für $A \subseteq M$ gilt. Damit gibt es nur eine Möglichkeit die

Skalarmultiplikation zu definieren. Nun muss noch gezeigt werde, dass die Axiome $(\vec{D}, D', V)$ erfüllt sind. Seien dazu $A, B \subseteq M$. Wir haben

$$1 \cdot (A \vartriangle B) = 1 \cdot A \vartriangle 1 \cdot B$$

und

$$0 \cdot (A \vartriangle B) = \varnothing = \varnothing \vartriangle \varnothing = 0 \cdot A \vartriangle 0 \cdot B.$$

Analog schließst man für das Axiom (D). Es ist $(1+0) \cdot A = 1 \cdot A = A = A \triangle \varnothing = 1 \cdot A \vartriangle 0 \cdot A$, sowie $(1+1) \cdot A = 0 \cdot A = \varnothing = A \vartriangle A = 1 \cdot A \triangle 1 \cdot A$ und $(0+0) \cdot A = \varnothing = 0 \cdot A \vartriangle 0 \cdot A$. Ist $M = \{m_1, \ldots, m_r\}$ eine endliche Menge mit $m_1, \ldots, m_r$ paarweise verschieden, so ist für $A \subseteq M$, so lässt sich A schreiben als $\sum\limits_{m \in A} \{m\}$ die disjunkte Vereinigung der Mengen $\{m_1\}, \ldots, \{m_r\}$, die in A liegen. Somit sind diese Mengen linear unabhängig. Wegen

$$A = \bigcup_{m \in A} \{m\} = \sum_{m \in A} \{m\}$$

für $A \subseteq M$, ist $B := (\{m_1\}, \ldots, \{m_r\})$ außerdem ein Erzeugendensystem von $\mathcal{P}(M)$, also eine Basis.

(d) Der Bequemlichkeit wegen schreiben wir $G := \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \mid f(a) = f(-a)\ \forall a \in \mathbb{R}\}$ und $U := \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \mid f(a) = f(-a)\ \forall a \in \mathbb{R}\}$. Offenbar ist die Nullabbildung sowohl in G als auch in U enthalten. Bleibt also zu zeigen, dass G bzw. U abgeschlossen unter Addition und Skalarmultiplikation sind. Seien $f, g \in G$ und $a \in \mathbb{R}$. Dann ist $(f+g)(a) = f(a) + g(a) = f(-a) + g(-a) = (f+g)(-a)$. Seien $h, k \in U$, dann ist $(h+k)(a) = h(a) + k(a) = -h(-a) + (-k(-a)) = -(h(-a) + k(-a)) = -(h+k)(a)$. Damit ist gezeigt, dass G und U abgeschlossen unter Addition sind. Sei nun $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann folgt $(\lambda f)(a) = \lambda f(a) = \lambda f(-a) = (\lambda f)(-a)$ und analog $(\lambda h)(a) = \lambda h(a) = \lambda(-h(-a)) = -\lambda(h(-a)) = -(\lambda h)(-a)$. Damit ist die Behauptung gezeigt.

Lösung 8.4:

Wir beginnen damit alle Geraden g des $\mathbb{F}_9$ zu bestimmen. Dabei genügt es jeweils ein $v \in \mathbb{F}_9^2 \setminus \{0\}$ anzugeben, so dass $g = \mathbb{F}_9 \cdot v$ ist. Man muss dann jedoch sichergehen, dass man keine Gerade doppelt zählt. Um zu einer „schönen" Aufzählung zu kommen, überlegt man sich, dass man zwei Fälle unterscheiden könnte. Entweder ist die erste Komponente von v gleich 0, dann ist dies für jeden Vektor der Gerade auch der Fall, oder die erste Komponente von v ist ungleich 0. Wegen der Nullteilerfreiheit von $\mathbb{F}_9$, muss dies dann auch für alle Vektoren λv mit $\lambda \in \mathbb{F}_9^\times$ gelten. Ist man im zweiten Fall, so gibt es immer genau einen Vektor in der Geraden, der im ersten Eintrag eine 1 stehen hat.Ist man im ersten Fall, so muss die zweite Komponente ungleich 0 sein (sonst wäre $v = 0$). Also kommt das Element $(0, 1)$ in der Geraden vor und die Gerade lässt sich gerade beschreiben als die Menge $(0, \lambda)$ mit $\lambda \in \mathbb{F}_9$. Insbesondere betrifft der erste Fall genau eine Gerade. Mit dieser Überlegung lassen sich die übrigen Geraden wie folgt auflisten:

$$\begin{array}{lll} g_1 = \mathbb{F}_9(1,0) & g_2 = \mathbb{F}_9(1,1) & g_3 = \mathbb{F}_9(1,2) \\ g_4 = \mathbb{F}_9(1,\mathring{\imath}) & g_5 = \mathbb{F}_9(1,1+\mathring{\imath}) & g_6 = \mathbb{F}_9(1,2+\mathring{\imath}) \\ g_7 = \mathbb{F}_9(1,2\mathring{\imath}) & g_8 = \mathbb{F}_9(1,1+2\mathring{\imath}) & g_9 = \mathbb{F}_9(1,3+\mathring{\imath}). \end{array}$$

Wir bringen nun die Körperelemente in die (willkürlich gewählte) Reihenfolge $0, 1, 2, \mathring{\imath}, 1+\mathring{\imath}, 2+\mathring{\imath}, 2\mathring{\imath}, 1+2\mathring{\imath}, 2+2\mathring{\imath}$. Der Übersichtlichkeit wegen wurden nur zwei Geraden eingezeichnet.

In Rot die Gerade $\mathbb{F}_9(0,1)$ und in blau die Gerade $\mathbb{F}_9(1, 1+\mathring{\imath})$. Die anderen Geraden lassen sich analog einzeichnen. Insgesamt ist später jeder Punkt ungleich dem Punkt $(0,0)$ Punkt genau einer Geraden. Weiter erkennt man, dass die Geraden nicht notwendigerweise „gerade“ sind.