Markus Schweighofer
22. September 2010

Nachklausur zur Linearen Algebra I

Familienname: Serre

Vorname: Jean-Pierre

Matrikelnummer: 2003

Übungsgruppenleiter in der Linearen Algebra I: Henri Cartan

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	$\sum$
erreichte Punktzahl	7	16	24	9	9	9	9	10	7	100
Korrektor (Initialen)										
Maximalpunktzahl	7	16	24	9	9	9	9	10	7	100

Fassen Sie den Klausurbogen nicht an, bevor die Klausur eröffnet wird!

Entfernen Sie nicht die Klammerung der Blätter. Sobald die Klausur eröffnet wird, tragen Sie auf **jeder Vorderseite sofort** Ihren Namen ein. Schreiben Sie die Lösung zu einer Aufgabe nur auf die dafür vorgesehenen Blätter. Wenn Sie sich nicht ganz sicher sind und noch genug Zeit ist, empfiehlt es sich, die Lösung zunächst auf Schmierpapier zu schreiben. Vergessen Sie aber nicht, die Lösung rechtzeitig auf den Klausurbogen zu übertragen. Soweit nichts anderes gesagt ist, gilt folgendes:

- Alle Antworten sind mathematisch zu begründen.
- Sofern nichts anderes gesagt ist, darf dabei auf mathematische Ergebnisse aus den Vorlesungen und den Übungen zur Linearen Algebra I (WS 2009/2010) verwiesen werden (zum Beispiel durch ein Stichwort wie „Homomorphiesatz“ oder durch kurze Beschreibung des Ergebnisses).
- Sie können die einzelnen Teilaufgaben einer Aufgabe in einer anderen als der vorgeschlagenen Reihenfolge bearbeiten und in jeder Teilaufgabe die erzielten (Zwischen-)Ergebnisse aus den vorher bearbeiteten Teilaufgaben verwenden.
- Bei Manipulation von Matrizen sind die durchgeführten Spalten- oder Zeilenoperationen stets anzugeben (im Stile der Vorlesung oder ähnlich, also etwa $Z_2 \leftrightarrow Z_4$ für Vertauschung der Zeilen 2 und 4 oder $Z_1 \leftarrow Z_1 - 7Z_2$ für Subtrahieren des 7-fachen der Zeile 2 von der Zeile 1).

Haben Sie irgendwelche Fragen, so zögern Sie nicht, sich (möglichst lautlos) bemerkbar zu machen. Ein Mitarbeiter wird zu Ihnen an den Platz kommen.

Die maximale Bearbeitungszeit beträgt 180 Minuten. Die einzigen erlaubten Hilfsmittel sind “Spickzettel”[1], Schreibzeug, Schmierpapier[2] und eine Uhr[3]. Viel Erfolg!

[1] ein beidseitig von eigener Hand beschriebenes Blatt im Format A4
[2] anfangs unbeschrieben
[3] ohne eingebaute Kommunikationsgeräte

Name: Jean-Pierre Serre **Seite 1 zur Aufgabe 1**

erreichte Punktzahl: 7 **Korrektor (Initialen):**

Aufgabe 1 (7 Punkte). Gibt es eine abelsche Gruppe $(G,+)$, die gleichzeitig folgende beiden Eigenschaften hat?

(1) $\#G = 5$, das heißt das Universum von $(G,+)$ hat genau fünf Elemente;

(2) $a + a = 0$ für alle $a \in G$ (wie üblich bezeichne 0 das neutrale Element der Addition).

Geben Sie ein explizites Beispiel an oder begründen Sie, warum das nicht möglich ist.

Lösung zur Aufgabe 1: Wir geben sogar zwei Lösungen.

Erste Lösung: Gäbe es so eine Gruppe, dann enthält sie wegen (1) natürlich ein Element $a \neq 0$, für welches nach (2) gilt $a + a = 0$. Aber in G darf es so ein Element nicht einmal geben (man hätte die Voraussetzungen also wesentlich schwächer und damit die Aussage stärker formulieren können). Es würde nämlich a eine zweielementige Untergruppe H von G erzeugen (siehe §2.2 der Vorlesung). Nach §2.3 der Vorlesung teilt aber die Mächtigkeit der Untergruppe H die Mächtigkeit der Gruppe G, das heißt es würde dann 2 ein Teiler von 5 sein, was absurd ist.

Zweite Lösung: Gelte Bedingung (2). Dann ist die Abbildung

$$\mathbb{F}_2 \times G \to G, \quad (\overline{n},g) \mapsto \overline{n}g := ng := \begin{cases} \overbrace{-g - \cdots - g}^{n\text{-mal}} & \text{falls } n \leq 0 \\ \underbrace{g + \cdots + g}_{n\text{-mal}} & \text{falls } n \geq 0 \end{cases} \qquad (n \in \mathbb{Z})$$

wohldefiniert, denn wenn $m,n \in \mathbb{Z}$ mit $\overline{m} = \overline{n}$ in $\mathbb{F}_2 = \mathbb{Z}/(2)$, so $mg = ng$ wegen (2). Jetzt ist es trivial nachzurechnen, dass die abelsche Gruppe G mit dieser Abbildung als Skalarmultiplikation zu einem $\mathbb{F}_2$-Vektorraum wird. Man muss dazu nur prüfen $1g = g$, $(\overline{m}\overline{n})g = \overline{m}(\overline{n}g)$, $(\overline{m} + \overline{n})g = \overline{m}g + \overline{n}g$ und $\overline{n}(g + h) = \overline{n}g + \overline{n}h$ für alle $m,n \in \mathbb{Z}$ und $g,h \in G$. Nun ist G ein endlich erzeugter (sogar endlicher) $\mathbb{F}_2$-Vektorraum und hat daher nach §6.2 der Vorlesung eine endliche Basis. Nach §6.3 der Vorlesung ist damit G als $\mathbb{F}_2$-Vektorraum isomorph zu $\mathbb{F}_2^n$ für ein $n \in \mathbb{N}_0$. Insbesondere gibt es eine Bijektion zwischen G und $\mathbb{F}_2^n$, das heißt G hat 2^n Elemente. Dies ist nicht mit Bedingung (1) vereinbar.

Name: Jean-Pierre Serre **Seite 1 zur Aufgabe 2**

erreichte Punktzahl: 16 **Korrektor (Initialen):**

Aufgabe 2 (16 Punkte). Wie in der Vorlesung bezeichne

$$\mathbb{F}_5 = \mathbb{Z}/(5) = \{0,1,2,3,4\} \qquad \text{und} \qquad \mathbb{F}_2 = \mathbb{Z}/(2) = \{0,1\}$$

den fünf- und den zweielementigen Körper (wir schreiben der Einfachheit halber für jedes $n \in \mathbb{Z}$ wieder etwas schlampig n für die Kongruenzklassen $\overset{\equiv_{(5)}}{n}$ und $\overset{\equiv_{(2)}}{n}$). Weiter sei

$$V := \mathbb{F}_2^{\mathbb{F}_5} = \{f \mid f : \mathbb{F}_5 \to \mathbb{F}_2\}$$

der $\mathbb{F}_2$-Vektorraum aller Abbildungen von $\mathbb{F}_5$ nach $\mathbb{F}_2$. Der Einfachheit halber kann man ein $f \in V$ als fünfstellige Binärzahl schreiben. Zum Beispiel steht 01100 für die Abbildung $f : \mathbb{F}_5 \to \mathbb{F}_2$ mit $f(0) = f(3) = f(4) = 0$ und $f(1) = f(2) = 1$. Wir definieren nun eine Relation $\sim$ auf V durch

$$f \sim g :\iff \exists s \in \mathbb{F}_5 : \forall x \in \mathbb{F}_5 : f(x) = g(x+s) \qquad (f,g \in V).$$

(a) Zeigen Sie, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf der Menge V ist.

(b) Bestimmen Sie eine Menge $B \subseteq V$ derart, dass $B \to V/\sim$, $f \mapsto \tilde{f}$ bijektiv ist. (Begründung **nicht** erforderlich!)

(c) Zeigen Sie, dass $\sim$ **keine** Kongruenzrelation auf dem Vektorraum V ist.

(d) Finden Sie eine surjektive lineare Abbildung $\Phi\colon V \to \mathbb{F}_2$ mit der Eigenschaft

$$a \sim b \implies \Phi(a) = \Phi(b)$$

für alle $a,b \in V$.

(e) Finden Sie eine von $V \times V$ verschiedene Kongruenzrelation $\equiv$ auf V mit

$$a \sim b \implies a \equiv b$$

für alle $a,b \in V$.

Lösung zur Aufgabe 2: (a) Zu zeigen ist, dass $\sim$ reflexiv, transitiv und symmetrisch ist.

Zur Reflexivität: Sei $f \in V$. Zu zeigen: $f \sim f$. Setze $s := 0$. Dann gilt $f(x) = f(x+s)$ für alle $x \in \mathbb{F}_5$.

Zur Transitivität: Seien $f,g,h \in V$ mit $f \sim g$ und $g \sim h$. Zu zeigen: $f \sim h$. Wähle $s,t \in \mathbb{F}_5$ mit $f(x) = g(x+s)$ und $g(x) = h(x+t)$ für alle $x \in \mathbb{F}_5$. Mit $u := s+t \in \mathbb{F}_5$ gilt dann $f(x) = g(x+s) = h((x+s)+t) = h(x+(s+t)) = h(x+u)$ für alle $x \in \mathbb{F}_5$. Also $f \sim h$.

Zur Symmetrie. Seien $f,g \in V$ mit $f \sim g$. Zu zeigen: $g \sim f$. Wähle $s \in \mathbb{F}_5$ mit $f(x) = g(x+s)$ für alle $x \in \mathbb{F}_5$. Setze $t := -s$. Dann gilt $g(x) = g(x+(t+s)) = g((x+t)+s) = f(x+t)$ für alle $x \in \mathbb{F}_5$. Daher $g \sim f$.

(b) Man kann $B := \{00000,10000,11000,10100,11100,11010,11110,11111\}$ nehmen. Die Intuition dahinter sind Halsbänder (englisch: necklaces), siehe:

`http://en.wikipedia.org/wiki/Necklace_(combinatorics)`

(c) Nehme $f_1 := 10000$, $f_2 := 01000$ und $g := 00100$. Dann gilt $f_1 \sim f_2$ und $g \sim g$, aber $f_1 + g = 10100 \not\sim 01100 = f_2 + g$.

(d) Nehme die „Quersummenabbildung“ $\Phi\colon V \to \mathbb{F}_2$, $f \mapsto \sum_{x \in \mathbb{F}_5} f(x)$.

(e) Setze $U := \ker \Phi$ und $(\equiv) := (\equiv_U) = (\equiv_\Phi)$. Sind $a,b \in V$ mit $a \sim b$, so gilt $\Phi(a) = \Phi(b)$ nach (d), also $a - b \in U$, das heißt $a \equiv b$.

Name: Jean-Pierre Serre **Seite 1 zur Aufgabe 3**

erreichte Punktzahl: 24 **Korrektor (Initialen):**

Aufgabe 3 (24 Punkte). Es bezeichne $V := \mathbb{R}[X]_3$ den $\mathbb{R}$-Vektorraum aller Polynome vom Grad ≤ 3 in der Unbestimmten X. Es bezeichne $\underline{v} := (1,X,X^2,X^3)$ die Basis von V bestehend aus den Monomen.

(a) Zeigen Sie, dass $\underline{w} := (w_1,w_2,w_3,w_4)$ mit

$$w_1 := 1, \quad w_2 := X, \quad w_3 := X(X-1) \quad \text{und} \quad w_4 := X(X-1)(X-2)$$

auch eine Basis von V ist.

(b) Berechnen Sie die Basiswechselmatrizen $M(\underline{v},\underline{w})$ und $M(\underline{w},\underline{v})$.

(c) Betrachten Sie nun die lineare Abbildung

$$f\colon V \to V,\, p \mapsto p(X+1) - p,$$

wobei $p(X+1) \in V$ das Polynom ist, welches aus p durch Einsetzen von $X+1$ für X hervorgeht. Berechnen Sie $M(f,\underline{v})$ und $M(f,\underline{w})$.

(d) Zeigen Sie, dass das charakteristische Polynom $\chi_f \in \mathbb{R}[T]$ von f gleich T^4 ist.

(e) Bestimmen Sie das Minimalpolynom $\mu_f \in \mathbb{R}[T]$ von f.

(f) Entscheiden Sie, ob f trigonalisierbar ist.

(g) Entscheiden Sie, ob f diagonalisierbar ist.

Lösung zur Aufgabe 3:(a) Da w_1,w_2,w_3,w_4 Polynome ungleich null von paarweise verschiedenem Grad sind, sind sie offensichtlich linear unabhängig. Wegen $\dim V = 4$ bilden sie eine Basis von V.

(b) In der i-ten Spalte der Basiswechselmatrix $M(\underline{w},\underline{v})$ stehen die Koordinaten von w_i bezüglich der Basis $\underline{v}$. Wegen

$$\begin{aligned} w_1 &= 1\cdot 1 + 0\cdot X + 0\cdot X^2 + 0\cdot X^3\\ w_2 &= 0\cdot 1 + 1\cdot X + 0\cdot X^2 + 0\cdot X^3\\ w_3 &= 0\cdot 1 - 1\cdot X + 1\cdot X^2 + 0\cdot X^3\\ w_4 &= 0\cdot 1 + 2\cdot X - 3\cdot X^2 + 1\cdot X^3 \end{aligned}$$

gilt also

$$M(\underline{w},\underline{v}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 2\\ 0 & 0 & 1 & -3\\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Wir invertieren nun $M(\underline{w},\underline{v})$, um $M(\underline{v},\underline{w}) = M(\underline{w},\underline{v})^{-1}$ zu erhalten:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -3 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{Z_3 \leftarrow Z_3 + 3Z_4}{\overset{Z_2 \leftarrow Z_2 + Z_3}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\overset{Z_2 \leftarrow Z_2 + Z_4}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Fortsetzung der Lösung zur Aufgabe 3: Es gilt also

$$M(\underline{v},\underline{w}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(c) Es ist f eine Art diskreter Ableitungsoperator. Genauso wie die Ableitung der Potenz X^k ($k \in \mathbb{N}$) gleich kX^{k-1} ist, so ist f angewandt auf eine „fallende Potenz“

$$X^{\underline{k}} := X(X-1)\cdots(X-k+1)$$

(hier $k \in \{1,2,3\}$, aber hätte man f auf ganz $\mathbb{R}[X]$ definiert, so könnte man auch $k \in \mathbb{N}$ betrachten) gleich

$$(X+1)^{\underline{k}} - X^{\underline{k}} = ((X+1)-(X-k+1))X^{\underline{k-1}} = kX^{\underline{k-1}}.$$

Insbesondere

$$f(w_4) = 3w_3, \quad f(w_3) = 2w_2, \quad f(w_2) = w_1 \quad \text{und} \quad f(w_1) = 0. \tag{1}$$

Daher

$$M(f,\underline{w}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

und

$$\begin{aligned} M(f,\underline{v}) = M(\underline{w},\underline{v})M(f,\underline{w})M(\underline{v},\underline{w}) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Alternativ kann man natürlich $M(f,\underline{v})$ auch direkt ohne Benutzung der Basiswechselmatrizen berechnen (ist vielleicht sogar einfacher).

(d) Es gilt

$$\chi_f = \det(M(f,\underline{w}) - TI_4) = \det \begin{pmatrix} -T & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -T & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -T & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -T \end{pmatrix} = (-T)^4 = T^4,$$

denn die charakteristische Matrix $M(f,\underline{w}) - TI_4$ ist in oberer Dreiecksgestalt.

(e) Nach Cayley-Hamilton ist das Minimalpolynom μ_f ein Teiler des charakteristischen Polynoms χ_f in $\mathbb{R}[T]$. Wegen $\chi_f = T^4$ sieht man sehr leicht $\mu_f = T^k$ für ein $k \in \{1,2,3,4\}$. Dann $f^k(w_4) = (\mu_f(f))(w_4) = 0(w_4) = 0$, woraus wegen (1) folgt $k = 4$. Also $\mu_f = T^4$.

(f) Selbstverständlich ist f trigonalisierbar, denn zum Beispiel $M(f,\underline{w})$ ist in oberer Dreiecksgestalt.

Name: Jean-Pierre Serre — **Seite 1 zur Aufgabe 4**

erreichte Punktzahl: 9 — **Korrektor (Initialen):**

Aufgabe 4 (9 Punkte). Bezeichne $\mathbb{F}_3 = \{0,1,2\}$ (wie üblich $2 := 1 + 1$) den dreielementigen Körper und $\mathbb{F}_9 = \mathbb{F}_3[\mathbb{i}]$ den aus der Vorlesung bekannten neunelementigen Körper ($\mathbb{i}$ eine imaginäre Einheit). Betrachte die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & \mathbb{i} \\ -\mathbb{i} & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1+\mathbb{i} \end{pmatrix} \in \mathbb{F}_9^{3\times 3}.$$

Berechnen Sie die Determinante $\det A$ und die inverse Matrix $A^{-1} \in \mathbb{F}_9^{3\times 3}$.

Lösung zur Aufgabe 4: Es gilt

$$(A \mid I_3) \underset{Z_3 \leftarrow Z_3 - Z_1}{\overset{Z_2 \leftarrow Z_2 + \mathbb{i} Z_1}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & \mathbb{i} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2+2\mathbb{i} & 0 & \mathbb{i} & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{Z_2 \leftarrow Z_2 + (2+2\mathbb{i}) Z_3}{\overset{Z_1 \leftarrow Z_1 + 2Z_3}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2+\mathbb{i} & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2+2\mathbb{i} & 1+2\mathbb{i} & 1 & 2+2\mathbb{i} \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\underset{\substack{Z_2 \leftarrow (1-\mathbb{i}) Z_2 \\ Z_3 \leftarrow -Z_3}}{\overset{\frac{1}{2+2\mathbb{i}} = \frac{2-2\mathbb{i}}{(2+2\mathbb{i})(2-2\mathbb{i})} = \frac{2-2\mathbb{i}}{4+4} = \frac{2-2\mathbb{i}}{2} = 1-\mathbb{i}}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2+\mathbb{i} & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & \mathbb{i} & 1+2\mathbb{i} & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\underset{Z_1 \leftarrow Z_1 - (2+\mathbb{i}) Z_2}{\overset{Z_3 \leftarrow Z_3 + Z_2}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \mathbb{i} & \mathbb{i} & 2\mathbb{i} \\ 0 & 0 & 1 & \mathbb{i} & 1+2\mathbb{i} & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1+\mathbb{i} & 1+2\mathbb{i} & 0 \end{pmatrix} \overset{Z_2 \leftrightarrow Z_3}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \mathbb{i} & \mathbb{i} & 2\mathbb{i} \\ 0 & 1 & 0 & 1+\mathbb{i} & 1+2\mathbb{i} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & i & 1+2\mathbb{i} & 1 \end{pmatrix} = (I_3 \mid A^{-1}),$$

also

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbb{i} & \mathbb{i} & 2\mathbb{i} \\ 1+\mathbb{i} & 1+2\mathbb{i} & 0 \\ i & 1+2\mathbb{i} & 1 \end{pmatrix}.$$

Um die Determinante von A zu berechnen, blicken wir noch einmal zurück: Wir haben gerade insbesondere A in I_3 durch elementare Zeilenoperationen übergeführt. Die einzigen dabei benutzten Zeilenoperationen, die die Determinante dabei veränderten, waren in dieser Reihenfolge:

$$Z_2 \leftarrow (1-\mathbb{i}) Z_2$$
$$Z_3 \leftarrow -Z_3$$
$$Z_2 \leftrightarrow Z_3$$

Es folgt $\det A = \frac{1}{1-\mathbb{i}}(-1)(-1)\det I_3 = \frac{1}{1-\mathbb{i}} = \frac{1+\mathbb{i}}{(1-\mathbb{i})(1+\mathbb{i})} = \frac{1+\mathbb{i}}{2} = -1-\mathbb{i} = 2+2\mathbb{i}$.

Name: Jean-Pierre Serre **Seite 1 zur Aufgabe 5**

erreichte Punktzahl: 9 **Korrektor (Initialen):**

Aufgabe 5 (9 Punkte). Gegeben sei die reelle Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ -3 & 9 & -5 \\ 1 & -5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

(a) Berechnen Sie das charakteristische Polynom von A.

(b) Bestimmen Sie die Determinante von A.

(c) Bestimmen Sie die zu A inverse Matrix A^{-1}.

Lösung zur Aufgabe 5: (a) Wir berechnen $\chi_A = \det(A - XI_3)$ mit Hilfe der Regel von Sarrus:

$$\begin{aligned}\chi_A &= \det \begin{pmatrix} 1-X & -3 & 1 \\ -3 & 9-X & -5 \\ 1 & -5 & 1-X \end{pmatrix} \\ &= (1-X)(9-X)(1-X) + 15 + 15 - (9-X) - 25(1-X) - 9(1-X) \\ &= -X^3 + 11X^2 + 16X - 4\end{aligned}$$

(b) $\det A = \chi_A(0) = -4$

(c) Da wir die Determinante von A schon berechnet haben, verwenden wir ausnahmsweise die Formel $A^{-1} = (\det A)^{-1}(\operatorname{com} A)^T$ aus §9.2 der Vorlesung, wobei $\operatorname{com} A$ die Komatrix von A bezeichne. Es gilt

$$\operatorname{com} A = \begin{pmatrix} 9-25 & -(-3+5) & 15-9 \\ -(-3+5) & 1-1 & -(-5+3) \\ 15-9 & -(-5+3) & 9-9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -16 & -2 & 6 \\ -2 & 0 & 2 \\ 6 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

und daher

$$A^{-1} = -\frac{1}{4}(\operatorname{com} A)^T = -\frac{1}{4}\operatorname{com} A = \begin{pmatrix} 4 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Name: Jean-Pierre Serre **Seite 1 zur Aufgabe 6**

erreichte Punktzahl: 9 **Korrektor (Initialen):**

Aufgabe 6 (9 Punkte). Gegeben sei die komplexe Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 2 & \mathbb{i} \\ -\mathbb{i} & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2\times 2}.$$

(a) Berechnen Sie die Eigenwerte von A und die dazugehörigen Eigenräume.

(b) Bestimmen Sie eine Basis $\underline{v} = (v_1,v_2)$ von $\mathbb{C}^2$, die aus Eigenvektoren von A besteht.

(c) Rechnen Sie nach, dass v_1 und v_2 eine Orthonormalbasis des $\mathbb{C}^2$ bilden. Ist dies Zufall?

Lösung zur Aufgabe 6: (a) Es gilt

$$\chi_A = \det(A - XI_2) = (2-X)(2-X) - (-\mathbb{i})\mathbb{i} = (X-2)^2 + \mathbb{i}^2 = X^2 - 4X + 3.$$

Die Nullstellen von χ_A sind also

$$\frac{4 \pm \sqrt{16-12}}{2} = 2 \pm 1,$$

also 1 und 3.

(b) Offensichtlich ist $v_1 := \begin{pmatrix} -\mathbb{i} \\ 1 \end{pmatrix}$ ein Eigenvektor von A zum Eigenwert 1 und $v_2 := \begin{pmatrix} \mathbb{i} \\ 1 \end{pmatrix}$ ein Eigenvektor zum Eigenwert 3. Da Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten linear unabhängig sind, ist $\underline{v} := (v_1,v_2)$ eine Basis von $\mathbb{C}^2$.

(c) Es gilt $\langle v_1,v_2\rangle = \mathbb{i}\cdot\mathbb{i} + 1\cdot 1 = \mathbb{i}^2 + 1 = -1 + 1 = 0$. Daher ist $\underline{v}$ eine Orthonormalbasis von V.

Dies ist kein Zufall, denn A ist selbstadjungiert, d.h. $A = A^*$. Eigenvektoren von selbstadjungierten Matrizen (oder Abbildungen) zu verschiedenen Eigenwerten stehen aber immer paarweise senkrecht aufeinander.

Um dies zu sehen sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum ($\mathbb{K} \in \{\mathbb{R},\mathbb{C}\}$) mit Skalarprodukt, $f : V \to V$ selbstadjungiert, $\lambda,\mu \in \mathbb{K}$ mit $\lambda \neq \mu$ und $v,w \in V \setminus \{0\}$ mit $f(v) = \lambda v$ und $f(w) = \mu w$. Zu zeigen ist $\langle v,w\rangle = 0$. Zunächst gilt $\lambda = \lambda^*$, denn

$$\lambda\langle v,v\rangle = \langle v,\lambda v\rangle = \langle v,f(v)\rangle = \langle f(v),v\rangle = \langle \lambda v,v\rangle = \lambda^*\langle v,v\rangle.$$

Nun hat man aber

$$\lambda\langle v,w\rangle = \lambda^*\langle v,w\rangle = \langle \lambda v,w\rangle = \langle f(v),w\rangle = \langle v,f(w)\rangle = \langle v,\mu w\rangle = \mu\langle v,w\rangle,$$

also $(\lambda-\mu)\langle v,w\rangle = 0$, also $\langle v,w\rangle = 0$.

Name: Jean-Pierre Serre **Seite 1 zur Aufgabe 7**

erreichte Punktzahl: 7 **Korrektor (Initialen):**

Aufgabe 7 (9 Punkte). Sei K ein Körper und $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in K^{2\times 2}$.

(a) Zeigen Sie, dass für $P := \begin{pmatrix} a-d & c \\ c & 0 \end{pmatrix}$ gilt $PA^T = AP$.

(b) Zeigen Sie, dass die Matrix A über K stets ähnlich zu der transponierten Matrix A^T ist.

Lösung zur Aufgabe 7: (a) Es gilt

$$PA^T = \begin{pmatrix} a-d & c \\ c & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 - da + bc & ac \\ ac & c^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a-d & c \\ c & 0 \end{pmatrix} = AP.$$

(b) Ist $c \neq 0$, so ist P invertierbar und daher $PA^TP^{-1} = A$ nach (a), also $A \approx A^T$. Ist $b \neq 0$, so bekommen wir analog $A^T \approx A$, also wieder $A \approx A^T$. Wir können also $b = c = 0$ annehmen. Dann gilt aber $A = A^T$ und damit natürlich wieder $A \approx A^T$.

Name: Jean-Pierre Serre **Seite 1 zur Aufgabe 8**

erreichte Punktzahl: 10 **Korrektor (Initialen):**

Aufgabe 8 (10 Punkte). Gegeben sei die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} -1 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

(a) Berechnen Sie das charakteristische Polynom und die Eigenwerte von A.

(b) Ist A trigonalisierbar?

(c) Ist A diagonalisierbar?

Lösung zur Aufgabe 8: (a) Die charakteristische Matrix von A lautet

$$M := \begin{pmatrix} -1-X & 1 & -4 \\ 0 & 1-X & 1 \\ 0 & -1 & 3-X \end{pmatrix} \in \mathbb{R}[X]^{3\times 3}.$$

Somit

$$\begin{aligned}\chi_A &= \det M = (-1-X)\det\begin{pmatrix} 1-X & 1 \\ -1 & 3-X \end{pmatrix} = (-1-X)((1-X)(3-X)+1) \\ &= (-X-1)(X^2-4X+4) = -X^3+3X^2-4 = (-1)(X+1)(X^2-4X+4) = (-1)(X+1)(X-2)^2.\end{aligned}$$

Die Eigenwerte von A sind die Nullstellen von χ_A, also -1 und 2.

(b) Da χ_A zerfällt, ist A trigonalisierbar.

(c) Die algebraische Vielfachheit des Eigenwertes 2 ist 2. Wäre A diagonalisierbar, so müsste auch die geometrische Vielfachheit dieses Eigenwertes, also die Dimension von $\ker(A-2I_3)$ gleich 2 sein. Es gilt

$$A - 2I_3 = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -4 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \overset{Z_3 \leftarrow Z_3 - Z_2}{\sim} \begin{pmatrix} -3 & 1 & -4 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

weswegen $A-2I_3$ den Rang 2 hat und damit aber eindimensionalen Kern hat. Also ist A nicht diagonalisierbar.

Name: Jean-Pierre Serre **Seite 1 zur Aufgabe 9**

erreichte Punktzahl: 7 **Korrektor (Initialen):**

Aufgabe 9 (7 Punkte). Berechnen Sie den Rest bei Division von $2^{90}-1$ durch $2^{65}-1$.

Lösung zur Aufgabe 9: Im Ring $\mathbb{Z}/(2^{65}-1)$ gilt

$$\overline{2^{90}-1} = \overline{2^{65}2^{25}} - \overline{1} = \overline{2^{25}} - \overline{1} = \overline{2^{25}-1}.$$

Wegen $0 \leq 2^{25}-1 < 2^{65}-1$ muss daher der gesuchte Rest gleich $2^{25}-1$ sein.