Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Wintersemester 2010/2011

Dr. Andrew Dolphin
Prof. Dr. Markus Schweighofer

Übungsblatt 1 zur Einführung in die Algebra

Aufgabe 1. Welche der folgenden sechs Definitionen des Gruppenbegriffes ist korrekt? Gebe jeweils einen Beweis oder ein Gegenbeispiel! „Eine Gruppe ist ein geordnetes Paar $(G,\cdot)$, wobei G eine Menge ist und $\cdot\colon G \times G \to G$ eine (meist infix oder gar nicht notierte) Abbildung ist derart, daß $(ab)c = a(bc)$ für alle $a,b,c \in G$ gilt und...

(a) $\exists e \in G : ((\forall a \in G : ea = a) \ \& \ (\forall a \in G : \exists b \in G : ab = e))$

(b) $\exists e \in G : ((\forall a \in G : ae = a) \ \& \ (\forall a \in G : \exists b \in G : ab = e))$

(c) $\exists e \in G : ((\forall a \in G : ae = a) \ \& \ (\forall a \in G : \exists b \in G : ba = e))$

(d) $\exists e \in G : ((\forall a \in G : ea = a) \ \& \ (\forall a \in G : \exists b \in G : ba = e))$

(e) $(\forall a,b \in G : \exists x \in G : xa = b) \ \& \ (\forall a,b \in G : \exists y \in G : ay = b)$

(f) $\forall a,b \in G : \exists x,y \in G : xay = b$“

Aufgabe 2. Ein geordnetes Paar $(S,\cdot)$ mit einer Menge S und einer (meist infix oder gar nicht notierten) Abbildung $\cdot\colon S \times S \to S$ heißt *Halbgruppe*, wenn $(ab)c = a(bc)$ für alle $a,b,c \in S$ gilt. Eine Halbgruppe $(S,\cdot)$ heißt *Monoid*, wenn es ein $e \in S$ gibt mit $ae = a = ea$ für alle $a \in S$. Zeigen Sie, daß ein endliches Monoid $(S,\cdot)$, in dem die beiden „Kürzungsregeln“

$$\forall a,b,c \in S : (ac = bc \implies a = b) \qquad \text{und} \qquad \forall a,b,c \in S : (ca = cb \implies a = b)$$

gelten, eine Gruppe ist. Ist diese Aussage allgemeiner sogar richtig für endliche Halbgruppen $(S,\cdot)$? Was ist, wenn S unendlich ist? **Aufgabe 3.** Sei K ein endlicher Körper mit q Elementen. Was ist

die Gruppenordnung von $\mathrm{GL}_n(K)$?