Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Wintersemester 2010/2011

Dr. Andrew Dolphin
Prof. Dr. Markus Schweighofer

Übungsblatt 2 zur Einführung in die Algebra

Aufgabe 1. Sei R ein kommutativer Ring und $n \in \mathbb{N}_0$. Zeige, daß die Mengen der

(a) invertierbaren oberen

(b) invertierbaren unteren

(c) unipotenten oberen und

(d) unipotenten unteren

Dreiecksmatrizen der Größe $n \times n$ jeweils Untergruppen von $\mathrm{GL}_n(R)$ sind.

Hinweis: Man kann die Formel aus §9.2 der Linearen Algebra benutzen, welche besagt

$$A^{-1} = (\det A)^{-1} (\operatorname{com} A)^T,$$

wobei die *Komatrix* $\operatorname{com} A = ((-1)^{i+j} \det A_{ij})_{1 \le i,j \le n}$ aus den nach einem Schachbrettmuster mit Vorzeichen versehenen $(n-1)$-Minoren $\det A_{ij}$ der Matrix A gebildet ist (A_{ij} bezeichne die Matrix, die aus A durch Streichen der i-ten Zeile und j-ten Spalte entsteht).

Aufgabe 2. Zeige, daß jede Gruppe gerader Ordnung außer dem neutralen Element noch mindestens ein weiteres selbstinverses Element besitzt.

Aufgabe 3. Gibt es einen Körper K und ein $n \in \mathbb{N}_0$ derart, daß D_6 isomorph ist zur Gruppe der invertierbaren oberen Dreiecksmatrizen der Größe $n \times n$ über K? Begründe die Antwort!

Aufgabe 4. Sei

$$P := \left\{ \begin{pmatrix} \pm 1 \\ \pm 1 \\ \pm 1 \end{pmatrix} \right\}$$

die Menge der acht Eckpunkte eines Würfels. Zeige durch anschauliche geometrische Überlegungen

$$\{A \in \mathrm{SO}_3 \mid \forall x \in P : Ax \in P\} \cong S_4.$$

Abgabe wegen des Feiertags ausnahmsweise bis Dienstag, den 2. November 2010, um 12:30 Uhr.