Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Wintersemester 2010/2011

Dr. Andrew Dolphin
Prof. Dr. Markus Schweighofer

Übungsblatt 3 zur Einführung in die Algebra

Aufgabe 1. Sei G eine Gruppe und $H \lhd G$ und $I \lhd G$, mit $H \subseteq I$. Zeige $I/H \lhd G/H$ und

$$(G/H)/(I/H) \cong G/I.$$

Aufgabe 2. Sei G eine Gruppe, $H \leq G$ und $N \lhd G$. Zeige $(H \cap N) \lhd H$, $N \lhd HN = NH \leq G$ und

$$H/(H \cap N) \cong (HN)/N.$$

Aufgabe 3. Sei R ein kommutativer Ring und $n \in \mathbb{N}_0$. Zeige

$$Z(\mathrm{GL}_n(R)) = \{aI_n \mid a \in R^\times\} \qquad \text{und} \qquad Z(\mathrm{SL}_n(R)) = \{aI_n \mid a \in R \text{ und } a^n = 1\}.$$

Hinweis: Betrachten Sie zunächst die Matrizen $E_{pq} := (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n} \in R^{n\times n}$ mit

$$a_{ij} = \begin{cases} 0 \text{ falls } (p,q) \neq (i,j) \\ 1 \text{ falls } (p,q) = (i,j) \end{cases}$$

und $I_n + E_{pq} \in \mathrm{GL}_n(R)$ für alle $p,q \in \{1,\ldots,n\}$ mit $p \neq q$.

Aufgabe 4. Sei K ein endlicher Körper mit q Elementen. Was ist die Gruppenordnung von $\mathrm{SL}_n(K)$?

Abgabe bis Montag, den 8. November 2010, vor der Vorlesung.