Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Wintersemester 2010/2011

Dr. Andrew Dolphin
Prof. Dr. Markus Schweighofer

Übungsblatt 5 zur Einführung in die Algebra

Aufgabe 1. Sei R ein kommutativer Ring, der genau 3 Ideale hat, $(0), I$ und R. Zeige, dass:

(1) $a - 1 \in R^\times$ für alle $a \in I$.

(2) $ab = 0$ für alle $a,b \in I$.

Finde ein Beispiel solches Ringes.

Aufgabe 2. Sei R ein kommutativer Ring und $I,J \subset R$ Ideale von R. Betrachte die Ideale

$$I + J := \{i + j \mid i \in I \text{ und } j \in J\}$$

und

$$IJ := \{i_1 j_1 + \ldots + i_n j_n \mid i_k \in I \text{ und } j_k \in J, k = 1,\ldots,n\}.$$

Zeige, dass $I + J = R \Rightarrow I \cap J = IJ$.
Was ist, wenn R nicht kommutativ ist?
(**Hinweis**: Betrachte 2×2 invertierbare Dreiecksmatrizen.)

Aufgabe 3. Betrachte den $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ aller reellen Folgen und dessen Endomorphismenring $A := \mathrm{End}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$. Finde ein $f \in A$, welches linksinvertierbar ist (d.h. es gibt $g \in A$ mit $gf = 1_A$), aber nicht rechtsinvertierbar ist.

Aufgabe 4. Betrachte den Ring $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ aller Funktion $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (mit punktweiser Addition und Multiplikation) und dem Einsetzungshomomorphismus

$$\varphi : \mathbb{R}[X,Y] \to \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$$

$$f \mapsto f(\cos,\sin).$$

Zeige $\ker(\varphi) = (X^2 + Y^2 - 1)$.
(**Hinweis**: Betrachte zunächst Polynome der Form $g + Yh$ mit $g,h \in \mathbb{R}[X]$)
Bemerkung: Die Elemente vom $\mathrm{im}(\varphi)$ nennt man *trigonometrische Polynome.*

Abgabe bis Montag, den 22. November 2010, vor der Vorlesung.