Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Wintersemester 2010/2011

Dr. Andrew Dolphin
Prof. Dr. Markus Schweighofer

Übungsblatt 10 zur Einführung in die Algebra

Aufgabe 1. Sei G eine Gruppe der Ordnung p^2q, für zwei Primzahlen $p \neq q$. Zeige, dass G eine p–Sylowgruppe oder eine q–Sylowgruppe enthält, die ein Normalteiler ist.

Aufgabe 2. Sei G eine Gruppe und $H \leqslant G$. Sei

$$N_G(H) := \{g \in G \mid gHg^{-1} = H\}.$$

Wir nennen $N_G(H)$ den *Normalisator* von H in G.
Zeige, dass

(1) $N_G(H) \leqslant G$.

(2) $H \lhd N_G(H)$.

(3) $H \lhd G \Leftrightarrow N_G(H) = G$.

(4) es eine Bijektion zwischen den Mengen $\{gN_G(H) \mid g \in G\}$ und $\{gHg^{-1} \mid g \in G\}$ gibt.

Aufgabe 3. Sei G eine endliche Gruppe und sei $H \leqslant G$. Sei $\tau : G \times X \to X$ eine transitive Gruppenwirkung und $x \in X$.

(i) Zeige, dass die Einschränkung von τ auf $H \times X$ genau dann transitiv ist, wenn $G = HG_x$, wobei $G_x = \{g \in G \mid \tau(g,x) = x\}$ und $HG_x = \{hg \mid g \in G_x, h \in H\}$.

(ii) Sei $M \lhd G$ und P eine p–Sylowgruppe von M. Zeige, dass $G = MN_G(P)$.

Aufgabe 4. Sei G eine Gruppe der Ordnung pq, für Primzahlen $p < q$. Zeige, dass G zyklisch ist, wenn p nicht $(q-1)$ teilt.

Aufgabe 5. Seien $p,q \in \mathbb{N}_0$ ungerade und prim (möglicherweise gleich). Sei G eine Gruppe der Ordnung $2pq$. Zeige, dass G eine eindeutige p–Sylowgruppe oder eine eindeutige q–Sylowgruppe (oder beide) enhält.

Aufgabe 6. Sei K ein Körper. Zeige, dass die Gruppe von invertierbaren oberen 3×3–Dreiecksmatrizen über K auflösbar ist.

Aufgabe 7. Sei K ein Körper. Zeige, dass $\mathrm{GL}_2(K)' = \mathrm{SL}_2(K)$.
Hinweis: Betrachte

$$\left[\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}y & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right], \left[\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & y\end{pmatrix}\right], \left[\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}x & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right] \in \mathrm{GL}_2(K)'.$$

Abgabe bis Montag, den 10. Januar 2011, vor der Vorlesung.