Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Wintersemester 2010/2011

Dr. Andrew Dolphin
Prof. Dr. Markus Schweighofer

Übungsblatt 11 zur Einführung in die Algebra

Aufgabe 1. Für jede Teilmenge M der komplexen Zahlenebene $\mathbb{C} = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}\mathbb{i} \cong \mathbb{R}^2$ sei

$$\begin{aligned} \mathrm{Ge}(M) &= \text{Menge der Geraden, die zwei verschiedene Punkte von } M \text{ enthalten} \\ \mathrm{Kr}(M) &= \text{Menge der Kreise, deren Mittelpunkt in } M \text{ liegt und deren} \\ & \text{Radius gleich dem Abstand zweier Punkte aus } M \text{ ist.} \end{aligned}$$

Wir betrachten dann die folgenden *elementaren Konstruktionsschritte*:

($\times$) Schnitt zweier verschiedener Geraden aus $\mathrm{Ge}(M)$

($\varnothing$) Schnitt einer Geraden aus $\mathrm{Ge}(M)$ mit einem Kreis aus $\mathrm{Kr}(M)$

(⚭) Schnitt zweier verschiedener Kreise aus $\mathrm{Kr}(M)$.

Für jede Menge $M \subseteq \mathbb{C}$ sei $M' \subseteq \mathbb{C}$ die Menge M vereinigt mit den Schnittpunkten, die man durch Anwendung von ($\times$), ($\varnothing$) und (⚭) erhalten kann. Man nennt die Elemente von M' die in einem Schritt aus M konstruierbaren Punkte. Nun definieren wir für $M \subseteq \mathbb{C}$ induktiv die Menge $M^{(n)}$ der in n Schritten ($n \in \mathbb{N}_0$) aus M konstruierbaren Punkte durch $M^{(0)} := M$ und $M^{(n+1)} := (M^{(n)})'$ für $n \in \mathbb{N}_0$. Schließlich sagen wir, die Punkte aus

$$\curlywedge M := \bigcup \{M^{(n)} \mid n \in \mathbb{N}\}$$

sind *mit Zirkel und Lineal aus M konstruierbar*. Zeige durch geometrische Konstruktionen (stichpunktartig kommentierte Skizzen), dass für jedes $M \subseteq \mathbb{C}$ mit $\{0,1\} \subseteq M$, die Menge $\curlywedge M$ einen Zwischenkörper von $\mathbb{C}|\mathbb{Q}(\mathbb{i})$ bildet.

Aufgabe 2. Sei $L|K$ eine Körpererweiterung und $a,b \in L$ mit $a^2 \in K$ und $b^2 \in K$.

(a) Finde ein Polynom $f \in K[X] \setminus \{0\}$ mit $f(a+b) = 0$.

(b) Welche Grade kommen für das Minimalpolynom $\mathrm{irr}_K(a+b)$ von $a+b$ über K in Frage? Gebe jeweils ein Beispiel für jeden möglichen Grad und ein stichhaltiges Argument für jeden unmöglichen Grad.

Aufgabe 3. Bestimme die Minimalpolynome von $\sqrt{3} + \sqrt{5}$ über $\mathbb{Q}, \mathbb{Q}(\sqrt{5})$ und $\mathbb{Q}(\sqrt{15})$.

Aufgabe 4. Sei $L|K$ eine Körpererweiterung mit $2 \neq 0$ in K und gelte $[L : K] = 2$.

(a) Zeige, dass es ein $x \in L$ gibt mit $L = K(x)$ und $x^2 \in K$.

(b) Zeige $\{b^2 \mid b \in L\} \cap K = \{a^2 \mid a \in K\} \cup \{(ax)^2 \mid a \in K\}$ für jedes x wie in (a).

Abgabe bis Montag, den 17. Januar 2011, vor der Vorlesung.