

Proseminar „Konvexe Mengen und positive Polynome“

Wintersemester 2010/2011

Lehrumfang: 2 SWS

Dozenten: Sabine Burgdorf (F418), Markus Schweighofer (F432)

<http://www.math.uni-konstanz.de/~burgdorf/>

<http://www.math.uni-konstanz.de/~schweigh/>

Zu diesem Proseminar wird als ergänzende (und de facto zwingend erforderliche) Lehrveranstaltung ein Tutorium zum Proseminar angeboten (2 SWS), welches nach Vereinbarung in Einzelterminen stattfindet. Die Termine können jederzeit mit Sabine Burgdorf und Markus Schweighofer vereinbart werden. Jeder Seminarteilnehmer sollte im Laufe der Vorbereitung in mehreren Terminen mindestens zwei Stunden in Gesprächen mit den Dozenten verbringen, um mathematische, didaktische und technische Fragen zu klären.

Für eine erfolgreiche Teilnahme am Proseminar sind folgende beide Leistungen in vernünftiger Weise zu erbringen. Für diejenigen Teilnehmer, die eine Note brauchen (vermutlich Lehramt und Wirtschaftspädagogik), richtet sich die Note nach der Qualität dieser Leistungen.

1. Ein 60-minütiger Tafelvortrag mit anschließender halbstündiger Diskussion.
2. Ein 2- bis 5-seitiges mit AMS- \LaTeX erstelltes Schriftdokument, welches in Zusammenhang mit dem Vortragsthema steht.

Im Ausnahmefall eines inhaltlich oder didaktisch völlig unzureichenden Vortrags, kann die erfolgreiche Teilnahme eventuell nachträglich durch eine etwa 15- bis 20-seitige schriftliche Ausarbeitung verbunden mit einem 15-minütigen Kurzreferat vor den beiden Dozenten erlangt werden.

1 Vortrag und Diskussion

Das Seminar findet in der Vorlesungszeit einmal wöchentlich statt. Jede Sitzung dauert 90 Minuten. Diese 90 Minuten sollen sich etwa wie folgt aufteilen:

- (a) 60 Minuten Vortrag an der Tafel
- (b) 15 Minuten mathematische Diskussion
- (c) 10 Minuten Diskussion des Vortragsstils
- (d) 5 Minuten Diskussion des Schriftdokuments

1.1 Vortrag

In der Regel soll der Vortrag in deutscher Sprache abgehalten werden, aber auch eine andere Sprache ist nach Rücksprache mit den Dozenten möglich.

Als Medium soll nur die Tafel verwendet werden.

Nur nach Rücksprache mit den Dozenten kann aus besonderen Gründen davon abgewichen werden. Zum Beispiel kann es manchmal angebracht sein, für aufwendige graphische Veranschaulichungen eine Folie vorzubereiten.

Der Hauptfehler, der nicht nur von Anfängern, sondern auch von fortgeschrittenen Mathematikern gemacht wird, ist die Stofffülle, die man in 60 Minuten vermitteln kann, um ein Vielfaches zu überschätzen.

Für den Vortragenden vergeht die Zeit während des Vortrags etwa dreimal so schnell.

Als Faustregel kann gelten, daß Sie in der zur Verfügung stehenden Zeit maximal 5 handgeschriebene Seiten im Format DIN A4 bewältigen können (pro Seite nur etwa 15 Zeilen zu je 40 Zeichen). Meist sind Sie auf einem guten Weg, wenn Sie sich zunächst vorstellen, daß Sie nur 20 Minuten für den Vortrag haben.

Es geht in dem Vortrag nicht darum, daß Sie deutlich machen, was Sie in der Vorbereitungszeit über Ihr Thema gelernt haben. Sie können davon nur einen hochkonzentrierten Extrakt eines kleinen Bruchteils präsentieren. Im Laufe der Vorbereitung sammeln Sie Wissen an und machen sich ein Bild von Ihrem Thema. Am Schluß präsentieren Sie aber nicht das Gemälde, welches in Ihrem Kopf entstanden ist, sondern allenfalls eine Radierung davon, denn 60 Minuten vergehen wie im Flug.

Der Vortrag richtet sich an Ihre Kommilitonen und nicht an die Dozenten. Ein Vortrag wird nicht dadurch gut, daß Sie mit Wissen glänzen. Vielmehr sollten Sie damit einen guten Teil ihrer Kommilitonen erreichen und diese auch dazu animieren, Fragen zu stellen.

Bauen Sie den Vortrag so auf, daß Sie bei Zeitnot immer einen Beweis oder ein Beispiel weglassen können, aber nicht die Formulierung und Illustrierung der Hauptergebnisse. Ein typischer zu empfehlender Aufbau wäre:

- (a) Erinnerung an das, was man von den Vorgängern übernimmt, allerdings in der Notation und Formulierung, die man selber für gut befindet
- (b) Definition der neuen Grundbegriffe
- (c) Erläuterungen und Beispiele, die dem Verständnis dienen
- (d) Formulierung der Hauptergebnisse
- (e) Anwendungsbeispiel
- (f) Grobskizze einiger Beweise [falls noch Zeit bleibt]
- (g) Detaillierte Beweise eines oder aller Hauptergebnisse [falls noch Zeit bleibt]

Anders als in vielen Vorlesungen, in denen nach und nach ein Manuskript entsteht, welches man mit Mühe auch daheim noch nacharbeiten könnte, geht es hier nur um einen einzelnen Vortrag, was noch weniger Zeit läßt und dazu zwingt, an der Tafel sehr kurz und prägnant zu sein.

Ein Vortrag steht grob, wenn Sie genau wissen, was Sie an die Tafel schreiben werden.

Hierzu ist ein gewisser Perfektionismus angebracht. Führen Sie eine geschickte und effiziente Notation ein, die sie mögen und die zu einem kompakten Anschrieb führt. Schreiben Sie lange Wörter nicht aus, sondern überlegen Sie sich dafür intuitive Abkürzungen.

Es empfiehlt sich, zur Sicherheit den Tafelanschrieb auf wenigen (!) Blättern Papier dabeizuhaben, selbst dann, wenn Sie ihn auswendig lernen sollten. Dazu kann man dann mündlich erläutern, was man sich beim Anschreiben dabei denkt. Letzteres ergibt sich meist auf natürliche Weise.

Während des Vortrags sind Zwischenfragen von Kommilitonen ausdrücklich erwünscht. Sollten sich die Kommilitonen diesbezüglich zurückhalten, so werden die Dozenten Zwischenfragen stellen. Beachten Sie das bei Ihrer Zeitplanung sowie auch die Tatsache, daß das Wischen der Tafel Zeit braucht.

Beachten Sie, daß in aller Regel keine Folien oder „Handouts“ erlaubt sind. Sie haben nur die Tafel und ihr Mundwerk zur Verfügung.

1.2 Mathematische Diskussion

An jeden Vortrag schließt sich eine etwa 15-minütige mathematische Diskussion an. Die Beantwortung der Fragen, die dabei von den Zuhörern kommen, haben dabei keinen Einfluß auf das Bestehen oder die Note des Vortragenden. Sie tun also dem Vortragenden keinen Gefallen, wenn Sie nichts fragen. Andererseits bringt es auch nichts, Fragen mit ihm vorher abzusprechen. Die Beantwortung der Fragen der Dozenten kann dagegen einen geringen Einfluß auf die Note haben. Insbesondere ist die Diskussion keinesfalls mit einer Prüfung zu verwechseln. Der Zweck ist hauptsächlich, Unverstandenes zu klären.

1.3 Diskussion des Vortragsstils

In der 10-minütigen Diskussion über den Vortragsstil sollen die Teilnehmer und die Dozenten sagen, was ihnen an der Ausführung des Vortrags gut und was ihnen dabei schlecht gefallen hat: Aufbau des Vortrags, Tafelanschrieb, Geschwindigkeit, mündliche Erklärungen, Notation, usw. . . Kritik von Seiten der studentischen Zuhörerschaft hat dabei keinerlei negative Auswirkungen auf das Bestehen oder die eventuelle Note des Teilnehmers.

1.4 Diskussion des Schriftdokuments

Jede Sitzung wird abgeschlossen mit einer 5-minütigen Diskussion des Schriftdokuments. Das sehr wenige Seiten umfassende Schriftdokument wird dazu 5 Minuten vor Schluß (also nicht während des Vortrags!) an jeden Teilnehmer ausgeteilt. Da das Schriftdokument (siehe nächster Abschnitt) so konzipiert sein darf, daß es einige Seiten aus einem größeren nicht existierenden Dokument darstellen könnte, geht es nicht um die Frage des Aufbaus, sondern um Fragen der Optik, des Stils, der Rechtschreibung, usw. . . Auch der \LaTeX -Quellcode soll dabei kurz diskutiert werden, indem man einen Auszug daraus auf den Overhead-Projektor legt. Dazu sollten Sie spätestens eine Woche vor dem Vortrag ihr Schriftdokument an Frau Otterbeck

<http://www.math.uni-konstanz.de/~schweigh/sekretariat.html>

schicken, sowohl als `pdf`- als auch als `tex`-Datei mit der Bitte, daß sie für jeden Seminarteilnehmer eine Kopie des Schriftdokuments anfertigt und den Quellcode (maximal 4 Seiten, falls er länger sein sollte) auf Folie druckt.

2 Schriftdokument

Das Schriftdokument soll nur wenige Seiten umfassen. Es sind 2 Seiten völlig ausreichend. Sie sollten in der Regel nicht mehr als 5 Seiten abliefern. Es handelt sich *nicht* um eine Ausarbeitung des Vortrags, sondern um ein Dokument, welches Teil einer (nicht existierenden) Abhandlung über ihr Thema sein könnte. Im Wesentlichen geht es darum, erste Schritte im Erstellen von Dokumenten im derzeit wohl konkurrenzlosen mathematischen Textsatzsystem \LaTeX zu unternehmen.

<http://en.wikipedia.org/wiki/LaTeX>

Wir raten dringend, dabei die heutzutage moderne Erweiterung AMS- \LaTeX (in praktisch jeder \LaTeX -Distribution automatisch enthalten) zu benutzen und neben irgendwelcher Literatur über \LaTeX auch die folgenden beiden Dokumente zu studieren:

<ftp://ftp.ams.org/pub/tex/doc/amsmath/amsl.doc.pdf>
<ftp://ftp.ams.org/pub/tex/doc/amscs/amsthdoc.pdf>

Als Ausgangsdokument empfehlen wir

<http://www.math.uni-konstanz.de/~schweigh/09.10/selbstadjungiert.tex>

in welchem Sie auch einen empfehlenswerten Kopf des Quellcodes finden. Letzteres könnte ein Schriftdokument zu dem Thema „Vektorräume mit Skalarprodukt“ darstellen, obwohl es natürlich nur einen kleinen Teil als Inhalt hat und in sich überhaupt nicht geschlossen ist. Auch den \LaTeX -Quellcode des Dokuments, was Sie gerade lesen, werden wir auf

<http://www.math.uni-konstanz.de/~schweigh/lehre.html>

veröffentlichen. Die Erstellung des Schriftdokuments ist im Vergleich zum Vortrag unwichtig. Sie sollten darauf nur einen kleinen Teil der Zeit verwenden. Es hat kaum Einfluß auf das Bestehen oder die Note im Proseminar. Lediglich im unwahrscheinlichen Fall eines völlig unzureichenden Vortrags könnte eine Expansion des Schriftdokuments zu einer Ausarbeitung verlangt werden.

Das Schriftdokument hat Spielcharakter und ist als „Kostprobe“ gedacht.

3 Vorbereitung

Es wird von Ihnen erwartet, daß Sie in der Vorbereitungsphase insgesamt mindestens zwei Stunden mit den Dozenten verbringen. Dies erfolgt in Einzelterminen, zu denen Sie aber auch mit betroffenen Kommilitonen erscheinen können, wenn Sie wollen. Sie können hierzu einfach an der Tür klopfen oder sich auf irgendeinem Weg anmelden. Den einzelnen Themen ist kein bestimmter Dozent zugeordnet. Es ist durchaus sinnvoll und erwünscht, mit beiden Dozenten getrennt oder gleichzeitig zu reden. Auf diese Weise erhält man sehr viel mehr Hinweise und kann verschiedene Anregungen und Meinungen einfangen. Je nach Belastung des Dozenten kann Sie aber ein Dozent hin und wieder an den anderen weiterverweisen. Auch kann ein Dozent zu einer Besprechung den anderen hinzurufen.

In den beiden ersten Augustwochen sind beide Dozenten nicht erreichbar.

Zunächst sollten Sie sich mit den nötigen Grundbegriffen vertraut machen und die mathematischen Aussagen, die in ihrem Thema vorkommen, anhand von Beispielen zu verstehen lernen. Vieles wird noch völlig unverstanden sein, aber es sollte sich allmählich herausstellen, um was es in ihrem Thema grob geht und worauf es aufbaut. In dieser Phase können Sie auch „wikipedia“ und andere Literatur verwenden, um manche Grundbegriffe zu verstehen.

Sodann sollten Sie sich klarmachen, welches die wichtigsten Aussagen sind, was Sie aus anderen Vorträgen importieren können (siehe auch den mitgelieferten Abhängigkeitsgraph in Abschnitt 6) und was die Leute auf jeden Fall aus ihrem Vortrag mitnehmen sollen. Sie sollten anhand von Beispielen und Diskussionen mit den anderen Seminarteilnehmern sowie den Dozenten ein intuitives Verständnis für ihr Thema aufbauen. Bevor Sie diesen Schritt abschließen, sollten Sie sich bezüglich der Import-Export-Frage mit ihren Nachbarn im Abhängigkeitsgraphen verständigen. Sie müssen sich keinesfalls auf eine gemeinsame Terminologie oder Notation einigen, aber sie sollten genau wissen, welche Resultate sie aus früheren Vorträgen verwenden können und welche Resultate in späteren Vorträgen verwendet werden.

Nun geht es darum, die Beweise zu verstehen. Dies hat oftmals den Charakter von Übungsaufgaben, da nicht alle Beweise so detailliert ausgeführt sind, wie das in Anfängervorlesungen der Fall ist. Es hilft meist wenig, auf andere Literatur auszuweichen. Man muß sich einfach durch eigenständiges Nachdenken durchkämpfen. Auch hier können Sie sehr gerne wieder die Hilfe der Dozenten in Anspruch nehmen, sollten sich aber vorher überlegen, an welchen Punkten es genau mit dem Verständnis hakt.

In der nächsten Phase sollten Sie sich überlegen, was das Ziel des Vortrags ist und wie Sie den Vortrag aufbauen könnten. Denken Sie dabei daran, was Sie importieren können und exportieren müssen. Denken Sie daran, daß stets chronisch unterschätzt wird, wieviel man in einem 60-minütigen Tafelvortrag machen kann. Bauen Sie deshalb den Vortrag so auf, daß Sie bei Zeitnot einen Beweis oder ein Beispiel weglassen, aber nicht die Formulierung des Hauptergebnisses.

Ein ganz wesentlicher Punkt ist nun, zu klären, was Sie an die Tafel schreiben werden. Versuchen Sie durch ein Experiment herauszubekommen, wieviel (vielmehr: *wie wenig*) Sie in 30 Minuten an die Tafel schreiben können. Stellen Sie fest, wieviel schneller Sie auf Papier schreiben, damit Sie derartige Experimente auch auf Papier durchführen können und nur umrechnen zu brauchen. Sie können nun davon ausgehen, daß Sie in einem 60-minütigen Vortrag auch nicht wesentlich mehr an die Tafel schreiben können, denn sie werden viel sprechen müssen und es werden Zwischenfragen kommen. Eine Konsequenz, die Sie nun ziehen müssen, ist, sich an der Tafel sehr kurz und prägnant zu fassen und auf effiziente Notation zurückzugreifen. Beachten Sie, daß der Tafelanschrieb ohne mündliche Erläuterung unverständlich sein darf, aber dennoch enorm wichtig ist.

Proben Sie den Vortrag zuerst allein und dann mit Kommilitonen. Beachten Sie den folgenden Zeitplan.

4 Zeitplan

Der folgende Zeitplan ist als Vorschlag gedacht. Im Einzelnen kann davon abgewichen werden (siehe auch die Daten, die in Abschnitt 5 angegeben sind).

- 1 Wochen vorher: Schriftdokument an Frau Otterbeck (siehe Abschnitt 1.4),
Generalprobe mit Kommilitonen
- 2 Wochen vorher: Einstudieren des endgültigen Vortrags
- 3 Wochen vorher: **Vortragsbesprechung (genauer Termin, siehe Abschnitt 5)**,
letzte Korrekturen am mündlichen Vortrag,
einen Tag vor der Vortragsbesprechung erste Version des schriftlichen Dokuments an beide Dozenten schicken sowohl als `tex`- als auch als `pdf`-Datei
- 4 Wochen vorher: erste Probe mit einem Kommilitonen
- 5 Wochen vorher: erste Probe allein
- 6 Wochen vorher: spätestens jetzt anfangen den mündlichen Vortrag auszuarbeiten,
Tafelanschrieb klären
- 7 Wochen vorher: kurzes Treffen mit den direkten Nachfolgern im Abhängigkeitsgraph
aus Abschnitt 6
- 8 Wochen vorher: kurzes Treffen mit den direkten Vorgängern im Abhängigkeitsgraph
aus Abschnitt 6
- 9 Wochen vorher: Quellen besorgen, Inhalt des Vortrags klären,
grundsätzliche Unklarheiten sofort mit den Dozenten besprechen
Lesen, Lernen, Verstehen

5 Themen

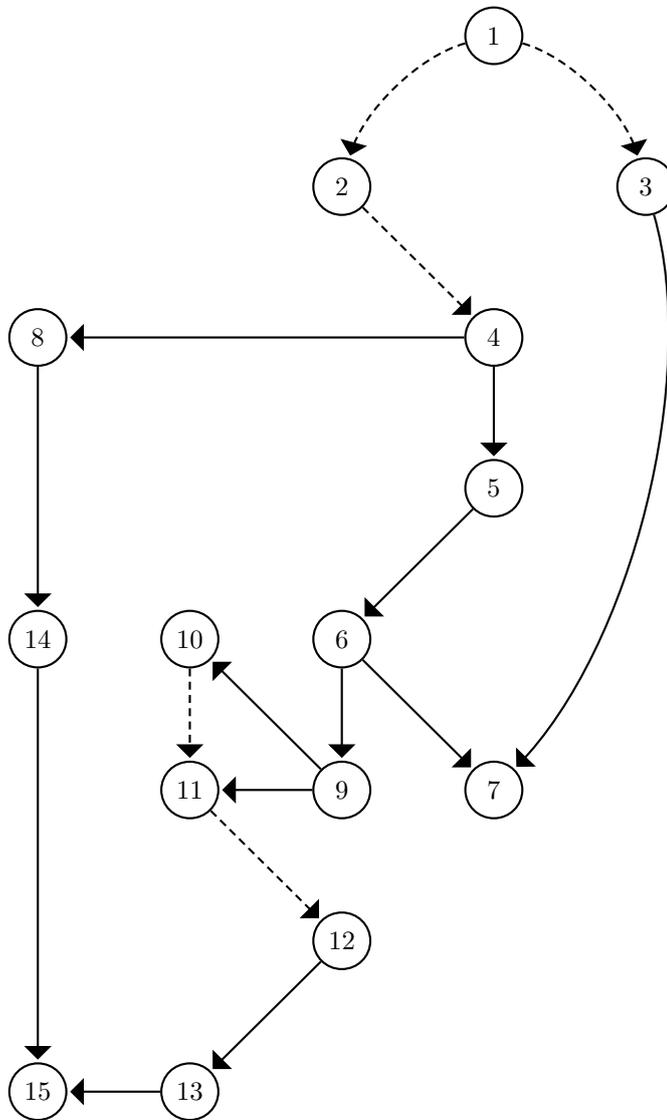
Jeder Seminarteilnehmer übernimmt einen der folgenden 15 Vorträge:

- Vortrag 1: **Titel:** Konvexe Mengen und der Satz von Carathéodory
Inhalt: Konvexe Menge, konvexe Hülle, Minkowskisumme, Satz von Carathéodory
Literatur: [1], Seite 1–11, Übungen 1.5.4 und 2.3.1, ohne Definition 2.2
Bemerkungen: Vortragsbesprechung spätestens am 04.10.2010
- Vortrag 2: **Titel:** Polyeder und lineare Abbildungen
Inhalt: Polyeder, Polytop; Beispiele, Projektion und lineare Transformation von Polyedern
Literatur: [1], Seite 8–9 und 37–38
Bemerkungen: Vortragsbesprechung spätestens am 08.10.2010
- Vortrag 3: **Titel:** Trennungssätze im \mathbb{R}^n , Teil I
Inhalt: affine Räume, affine Hüllen, Halbräume, Trennung, strikte Trennung, algebraisch offen, Trennungssatz für algebraisch offene konvexe Menge
Literatur: [1], Seite 41–47
Bemerkungen: Vortragsbesprechung spätestens am 15.10.2010
- Vortrag 4: **Titel:** Trennungssätze im \mathbb{R}^n , Teil II
Inhalt: innerer Punkt, Inneres, Rand, Dimension, Seite, Trennung des Inneren von einem Randpunkt, Trennung einer konvexen Menge von einem Punkt
Literatur: [1], Seite 47–51
Bemerkungen: Vortragsbesprechung spätestens am 22.10.2010
- Vortrag 5: **Titel:** Trennungssätze im \mathbb{R}^n , Teil III
Inhalt: Trennung mittels linearer Funktionale, Trennungssatz für disjunkte konvexe Mengen, Trennungssätze für abgeschlossene konvexe Mengen
Literatur: [1], Seite 105–109
Bemerkungen: Vortragsbesprechung spätestens am 29.10.2010
- Vortrag 6: **Titel:** Extrempunkte und der Satz von Krein-Milman
Inhalt: Extrempunkte, Werte linearer Funktionale und Extrempunkte, Satz von Krein-Milman, Existenz von Extrempunkten
Literatur: [1], Seite 51–53
Bemerkungen: Vortragsbesprechung spätestens am 05.11.2010
- Vortrag 7: **Titel:** Polyeder und ihre Extrempunkte
Inhalt: Ecken, beschränkte Polyeder, Beispiel: Birkhoff-Polytop, Birkhoff-von-Neumann-Theorem
Literatur: [1], Seite 53–57, ohne Beispiel 4.4
Bemerkungen: Vortragsbesprechung spätestens am 12.11.2010
- Vortrag 8: **Titel:** Der Polar und das Bipolartheorem
Inhalt: Polar, Beispiele, Bipolartheorem, Polytope und Polyeder
Literatur: [1], Seite 143–147
Bemerkungen: Vortragsbesprechung spätestens am 19.11.2010

- Vortrag 9: **Titel:** Konvexe Kegel
Inhalt: Konvexer Kegel, Polar eines konvexen Kegels, Extremalstrahl, Basis, Krein-Milman, Trennungssätze und Bipolartheorem für konvexe Kegel
Literatur: [1], Seite 65–67 und Seite 147
Bemerkungen: Erstbesprechung im Oktober, Vortragsbesprechung spätestens am 26.11.2010
- Vortrag 10: **Titel:** Positive Polynome in einer Variablen sind Quadratsummen
Inhalt: Polynomring in einer Variablen, positive Polynome, Quadratsummen, Beweis über Fundamentalsatz der Algebra und mittels Trennungssatz
Bemerkungen: erstes Treffen Anfang Oktober, Material wird bei der Erstbesprechung erstellt
- Vortrag 11: **Titel:** Positive ternäre Quartiken sind Quadratsummen
Inhalt: Polynomring in mehreren Variablen, ternäre Quartiken
Literatur: [2], Seite 85–89
Bemerkungen: Vortragsbesprechung spätestens im Dezember 2010
- Vortrag 12: **Titel:** Die Gram-Matrix-Methode
Inhalt: Methode zum Auffinden von Quadratsummendarstellungen, diverse Beispiele
Literatur: [5], siehe auch [4] Kapitel 3.3
Bemerkungen: Vortragsbesprechung spätestens im Dezember 2010
- Vortrag 13: **Titel:** Positive Polynome und Quadratsummen
Inhalt: Beispiele positiver Polynome, die keine Quadratsumme sind, Zusammenfassung der letzten Vorträge im Satz von Hilbert
Literatur: Kapitel 4 und Seite 2–3 in [6], [7]
Bemerkungen: Vortragsbesprechung spätestens am 07.01.2011
- Vortrag 14: **Titel:** Quadratsummen und positiv semidefinite Momentenmatrizen
Inhalt: Dualer Kegel, Momentenmatrizen, Kegel der Quadratsummen und der positiv semidefiniten Momentmatrizen, Abgeschlossenheit dieser Kegel
Literatur: [1] Seite 162, [4]
Bemerkungen: Erstbesprechung/Materialerstellung im Oktober 2010, Vortragsbesprechung spätestens am 14.01.2011
- Vortrag 15: **Titel:** Quadratsummen, positive Polynome und positiv definite Momentenmatrizen
Inhalt: Kubaturformeln, dualer Kegel der positiven Polynome, Zusammenhang von Positivität, Quadratsummen und positiv definiten Momentenmatrizen
Literatur: [3] Kapitel 2
Bemerkungen: Erstbesprechung/Materialerstellung im Oktober 2010, Vortragsbesprechung spätestens am 21.01.2011

6 Abhängigkeitsgraph

Die folgende Graphik veranschaulicht den Zusammenhang der einzelnen Themen. Sprechen Sie sich mit dem direkten Vorgängern und den direkten Nachfolgern ab.



7 Quellen

In der Lehrbuchsammlung sind einige wenige Exemplare des Buchs von Barvinok unter der Signatur `lbs 800/b17m` vorhanden. Unter der Signatur `mat 9:ba78:xh/c69` findet sich in der Bibliothek ein weiteres Exemplar, welches derzeit ausgeliehen ist. Schließlich steht ein Exemplar, welches nicht ausgeliehen werden kann, im Semesterapparat Schweighofer `15/021685`. Ansonsten helfen Ihnen die Dozenten bei der Literaturbeschaffung.

Literatur

- [1] A. Barvinok, A course in convexity, Graduate Studies in Mathematics, Vol. 54, AMS, 2002
- [2] A. R. Rajwade, Squares, London Mathematical Society Lecture Note Series, 171, Cambridge University Press, 1993
- [3] L. Fialkow, J. Nie, Positivity of Riesz functionals and solutions of quadratic and quartic moment problems, *J. Funct. Anal.* 258 (2010), no. 1, 328–356
<http://arxiv.org/abs/0908.3230>
- [4] M. Laurent, Sums of squares, moment matrices and optimization over polynomials, Emerging applications of algebraic geometry, 157–270, IMA Vol. Math. Appl., 149, Springer, New York, 2009
<http://homepages.cwi.nl/~monique/files/moment-ima-update-new.pdf>
- [5] V. Powers, T. Wörmann, An algorithm for sums of squares of real polynomials, *J. Pure Appl. Algebra* 127 (1998), no. 1, 99–104
<http://www.math.uni-bonn.de/people/woermann/PW.pdf>
- [6] B. Reznick, Some concrete aspects of Hilbert’s 17th Problem, *Contemp. Math.*, 253 (2000), 251–272
<http://www.math.uiuc.edu/~reznick/hil17.pdf>
- [7] A. Lax, P.D. Lax. On sums of squares. *Linear Algebra Appl.* 20, *Linear Algebra and Appl.* 20 (1978), no. 1, 71–75