Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Markus Schweighofer
Dr. Sven Wagner

Sommersemester 2010
Übungsblatt 14
12.04.2010

Lineare Algebra II

Aufgabe 14.1:

Sei $\langle\cdot,\cdot\rangle\colon \mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$, die durch

$$\langle(x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3)\rangle := x_1y_1+\frac{1}{2}x_1y_2+\frac{1}{2}x_2y_1+x_2y_2+\frac{1}{2}x_2y_3+\frac{1}{2}x_3y_2+x_3y_3$$

definierte Abbildung.

(a) Zeigen Sie, dass $\langle\cdot,\cdot\rangle$ ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^3$ ist.

(b) Berechnen Sie bezüglich $\langle\cdot,\cdot\rangle$ den Winkel zwischen

  (i) $(1,0,0)$ und $(0,1,0)$,

  (ii) $(1,1,-1)$ und $(-1,-1,1)$.

(c) Berechnen Sie mit dem Gram–Schmidt–Verfahren ausgehend von der Standardbasis $\underline{e}$ des $\mathbb{R}^3$ eine Orthonormalbasis $\underline{v}$ von $(\mathbb{R}^3,\langle\cdot,\cdot\rangle)$.

(d) Bestimmen Sie $M(\underline{e},\underline{v})$ und $M(\underline{v},\underline{e})$.

(e) Sind für die folgenden Matrizen $A\in\mathbb{R}^{3\times 3}$ die zugehörigen linearen Abbildungen f_A selbstadjungierte Endomorphismen von $(\mathbb{R}^3,\langle\cdot,\cdot\rangle)$? Begründen Sie Ihre Antwort.

$$\text{(i)}\ \begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}\qquad\text{(ii)}\ \begin{pmatrix}0&\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{2}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{2}{3}&-\frac{\sqrt{2}}{3}\\\frac{\sqrt{6}}{3}&-\frac{\sqrt{2}}{3}&\frac{1}{3}\end{pmatrix}$$

Aufgabe 14.2:

Sei $n\in\mathbb{N}_0$. Zu $A=(a_{ij})_{1\le i,j\le n}\in\mathbb{R}^{n\times n}$ betrachten wir die **Spur** von A:

$$\operatorname{tr}(A):=\sum_{i=1}^n a_{ii}.$$

Zeigen Sie, dass auf $\mathbb{R}^{n\times n}$ durch

$$\langle A,B\rangle=\operatorname{tr}(A^TB)$$

ein Skalarprodukt definiert wird und berechnen Sie diesbezüglich die Winkel zwischen

$$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\text{ und }\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

sowie

$$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\text{ und }\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}.$$

Bitte wenden.

Aufgabe 14.3:

Finden Sie zu den folgenden symmetrischen Matrizen A jeweils eine Diagonalmatrix D und eine orthogonale Matrix P mit Einträgen in $\mathbb{R}$, so dass $A = P^* D P$ gilt.

(a)

$$\begin{pmatrix} 5 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 3 \end{pmatrix}$$

(b)

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

Abgabe bis Montag, den 19. April, 10 Uhr in die Briefkästen neben F411.