Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Markus Schweighofer
Dr. Sven Wagner

Sommersemester 2010
Übungsblatt 17
03.05.2010

Lineare Algebra II

Aufgabe 17.1:

Seien $\ell_1, \dots, \ell_k$ und ℓ Linearformen auf einem endlichdimensionalen Vektorraum V. Zeigen Sie unter Verwendung des kanonischen Isomorphismus $V \to V^{**}$ aus §13.1, dass folgende Bedingungen äquivalent sind:

(i) Für alle $x \in V$ gilt: $(\ell_1(x) = \dots = \ell_k(x) = 0) \implies \ell(x) = 0$.

(ii) Es gilt $\ell \in \operatorname{span}(\ell_1, \dots, \ell_k)$.

Bleibt die entsprechende Aussage gültig, wenn man

1. $\ell_1, \dots, \ell_k$ durch eine unendliche Folge $\ell_1, \ell_2, \ell_3, \dots$ von Linearformen auf V ersetzt?
2. für V einen Vektorraum beliebiger Dimension zuläßt?
3. beide der vorangegangenen Änderungen vornimmt?

Geben Sie jeweils einen Beweis oder ein Gegenbeispiel an.

Aufgabe 17.2:

Sei V ein Vektorraum der Dimension $n \in \mathbb{N}_0$.

(a) Seien $\ell_1, \dots, \ell_k \in V^*$ Linearformen auf V. Zeigen Sie: $\dim\left(\bigcap_{i=1}^{k} \ker \ell_i\right) \geq n - k$.

(b) Seien $\ell_1, \dots, \ell_k \in V^*$ Linearformen auf V. Zeigen Sie, dass $\ell_1, \dots, \ell_k$ genau dann linear unabhängig sind, wenn $\dim\left(\bigcap_{i=1}^{k} \ker \ell_i\right) = n - k$ gilt.
(Hinweis: Verwenden Sie Aufgabe 17.1.)

(c) Zeigen oder widerlegen Sie: Jede Basis von V^* ist dual zu einer Basis von V.

Aufgabe 17.3:

(a) Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix der Bilinearform aus Aufgabe 14.1 bezüglich der Standardbasis des $\mathbb{R}^3$.

(b) Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix der Bilinearform $b\colon \mathbb{Q}^4 \times \mathbb{Q}^4 \to \mathbb{Q}$,

$$((x_1, x_2, x_3, x_4), (y_1, y_2, y_3, y_4)) \mapsto x_1y_1 + (x_1+x_2)y_2 + (x_1+x_2+x_3)y_3 + (x_1+x_2+x_3+x_4)y_4,$$

bezüglich der Standardbasis des $\mathbb{Q}^4$.

Aufgabe 17.4:

Seien K ein Körper und $n \in \mathbb{N}_0$. Seien $b\colon V \times V \to K$ eine Bilinearform auf einem n–dimensionalen K–Vektorraum V und $A \in K^{n\times n}$ eine Darstellungsmatrix von b. Zeigen Sie, dass A genau dann Rang ≤ 1 hat, wenn es Linearformen $\ell_1, \ell_2 \in V^*$ gibt, so dass $b(v, w) = \ell_1(v)\ell_2(w)$ für alle $v, w \in V$ gilt.
(Hinweis: Zeigen Sie, dass die Matrix A genau dann Rang ≤ 1 hat, wenn sie von der Gestalt B^TC mit $B, C \in K^{1\times n}$ ist.)

Abgabe bis Montag, den 10. Mai, 10 Uhr in die Briefkästen neben F411.