Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Markus Schweighofer
Dr. Sven Wagner

Sommersemester 2010
Übungsblatt 20
25.05.2010

Lineare Algebra II

Aufgabe 20.1:

Berechnen Sie die Cholesky–Zerlegung, die Sylvester–Signatur und die Determinante der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 9 & 3 & -6 & 12 \\ 3 & 26 & -7 & -11 \\ -6 & -7 & 9 & 7 \\ 12 & -11 & 7 & 65 \end{pmatrix} \in S\mathbb{R}^{4x4}.$$

Aufgabe 20.2:

Zeigen Sie, dass für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ die reelle Matrix $A_n := \left(\frac{1}{\max\{i,j\}}\right)_{1\leq i,j\leq n}$ positiv definit ist, und zeigen Sie, dass $\det(A) = \frac{1}{(n!)^2}$ gilt. Bestimmen Sie für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ die Cholesky–Zerlegung von A_n.

(Hinweis: Bestimmen Sie nacheinander die Cholesky–Zerlegung von A_0, A_1, A_2, usw., bis Sie nicht mehr können. Stellen Sie dann eine Vermutung auf, wie die Cholesky–Zerlegung allgemein aussehen könnte. Bestätigen Sie diese Vermutung durch geschicktes Rechnen mit quadratischen Formen.)

Aufgabe 20.3:

Eine Teilmenge S des $\mathbb{R}^n$ heißt ein **Spektraeder**, wenn es ein $t \in \mathbb{N}$ und $A_0, A_1, \dots, A_n \in S\mathbb{R}^{t\times t}$ mit $S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid A_0 + x_1A_1 + \cdots + x_nA_n \text{ ist psd}\}$ gibt.

(a) Zeichnen Sie grob den Spektraeder $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid A_0 + xA_1 + yA_2 \text{ ist psd}\}$ mit

$$A_0 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_1 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ und } A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Begründen Sie ihre Zeichnung.

(b) Zeigen Sie, dass die Einheitskugel $\{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq 1\}$ im $\mathbb{R}^n$ ein Spektraeder ist.

Abgabe bis Montag, den 31. Mai, 10 Uhr in die Briefkästen neben F411.