Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Markus Schweighofer
Dr. Sven Wagner

Sommersemester 2010
Übungsblatt 21
31.05.2010

# Lineare Algebra II

**Aufgabe 21.1:**

Sei $n \in \mathbb{N}_0$. Betrachten Sie das auf $V := \mathbb{R}^{n\times n}$ durch

$$\langle A, B\rangle = \operatorname{tr}(A^T B)$$

definierte Skalarprodukt (vgl. Aufgabe 14.2). Bestimmen Sie die adjungierten Abbildungen der folgenden Endomorphismen von $V$:

(a) $A \mapsto A^T$,

(b) $A \mapsto CA$ für ein festes $C \in \mathbb{R}^{n\times n}$,

(c) $A \mapsto CAC^{-1}$ für ein festes, invertierbares $C \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

**Aufgabe 21.2:**

Sei $V$ ein Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle \cdot\,, \cdot\rangle$ und $f \in \operatorname{End}(V)$. Zeigen Sie, dass aus je zwei der folgenden Eigenschaften die dritte folgt. Geben Sie Beispiele an, die belegen, dass jedoch aus keiner der Eigenschaften eine andere folgt.

(i) $f$ ist selbstadjungiert, das heißt $\langle f(v), w\rangle = \langle v, f(w)\rangle$ für alle $v, w \in V$.

(ii) $f$ ist orthogonal, das heißt $\langle v, w\rangle = \langle f(v), f(w)\rangle$ für alle $v, w \in V$.

(iii) $f^2 = \operatorname{id}_V$.

**Aufgabe 21.3:**

Sei

$$A := \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}.$$

Zeigen Sie, dass $f_A \in \operatorname{End}(\mathbb{R}^2)$ genau dann normal ist, wenn $A$ symmetrisch ist oder $b = -c$ und $a = d$ gelten.

**Aufgabe 21.4:**

Sei $V := \mathbb{C}^3$ und der Endomorphismus $f\colon V \to V$ bzgl. der Standardbasis definiert durch die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 4-i & -4 & 2+2i \\ -4 & 4+i & -2+2i \\ 2+2i & -2+2i & 1 \end{pmatrix}$$

Zeigen Sie, dass $f$ normal ist und bestimmen Sie eine ONB von $V$, die aus Eigenvektoren von $f$ besteht.

**Abgabe bis Montag, den 7. Juni, 10 Uhr in die Briefkästen neben F411.**