Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Markus Schweighofer
Dr. Sven Wagner

Sommersemester 2010
Übungsblatt 22
07.06.2010

Lineare Algebra II

Aufgabe 22.1:

Es gelte der Fundamentalsatz der Algebra. Sei V ein endlichdimensionaler $\mathbb{C}$–Vektorraum mit Skalarprodukt.

(a) Sei $f \in \operatorname{End}(V)$. Zeigen Sie, dass f genau dann normal ist, wenn ein Polynom $p \in \mathbb{C}[X]$ mit $p(f) = f^*$ existiert.
(Notation: vgl. §10.2. Hinweis: Verwenden Sie Aufgabe 11.3.)

(b) Zeigen Sie, dass

$$A := \begin{pmatrix} \mathring{\imath} & -\mathring{\imath} & 1 \\ \mathring{\imath} & \mathring{\imath} & \mathring{\imath} \\ 1 & -\mathring{\imath} & \mathring{\imath} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{3\times 3}$$

normal ist, und bestimmen Sie ein Polynom $p \in \mathbb{C}[X]$ mit $p(A) = A^*$.

(c) Bestimmen Sie für die Matrix A aus Aufgabe 21.4 ein $p \in \mathbb{C}[X]$ mit $p(A) = A^*$.

(d) Seien $f, g \in \operatorname{End}(V)$ normal mit $f \circ g = g \circ f$. Zeigen Sie, dass auch $f \circ g$ normal ist.

(e) Gilt die Aussage aus (d) auch dann noch, wenn man die Voraussetzung $f \circ g = g \circ f$ weglässt?

Aufgabe 22.2:

Ein Fußballspieler verschießt in einem Spiel einen Elfmeter. Da es auch nach Verlängerung immer noch unentschieden steht, gibt es Elfmeterschießen, bei dem der unzuverlässige Schütze auch wieder einen Elfmeter schießen muss. Wie das Schicksal es will, wird auf das gleiche Tor geschossen, in dem er schon einmal den Ball nicht unterbringen konnte. Als abergläubischer Mensch möchte er den Ball daher so auf den Elfmeterpunkt legen, dass kein Punkt auf der Oberfläche des Balles in der gleichen Position liegt, wie er bei dem verschossenen Elfmeter lag. Geht das?

Aufgabe 22.3:

Seien A ein kommutativer Ring und I, J, K Ideale von A.

(a) Zeigen Sie, dass auch die folgenden Mengen Ideale von A sind:
(i) $I \cap J$,
(ii) $I + J := \{a + b \mid a \in I,\ b \in J\}$,
(iii) $IJ := \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i b_i \mid n \in \mathbb{N},\ a_1, \ldots, a_n \in I,\ b_1, \ldots, b_n \in J \right\}$ und
(iv) $I : J := \{a \in A \mid ab \in I \text{ für alle } b \in J\}$.
Zeigen Sie außerdem, dass $I \cup J$ im Allgemeinen kein Ideal von A ist.

(b) Zeigen Sie: (i) $I : (I + J) = I : J$, (ii) $(I \cap J) : K = (I : K) \cap (J : K)$ und (iii) $(I : J) : K = I : JK$.

(c) Es gelte für alle $a, b \in A \setminus \{0\}$ stets $ab \neq 0$. Zeigen Sie: Sind I, J und $I + J$ Hauptideale, so ist auch $I : J$ ein Hauptideal.

Abgabe bis Montag, den 14. Juni, 10 Uhr in die Briefkästen neben F411.