Klausur zur Linearen Algebra I und II (Modulklausur, Zwischenprüfung)

Familienname:

Vorname:

Matrikelnummer:

Übungsgruppenleiter in der Linearen Algebra I:

Übungsgruppenleiter in der Linearen Algebra II:

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	$\sum$
erreichte Punktzahl										
Korrektor (Initialen)										
Maximalpunktzahl	7	16	24	9	9	9	9	10	7	100

Fassen Sie den Klausurbogen nicht an, bevor die Klausur eröffnet wird!

Entfernen Sie nicht die Klammerung der Blätter. Sobald die Klausur eröffnet wird, tragen Sie auf **jeder Vorderseite sofort** Ihren Namen ein. Schreiben Sie die Lösung zu einer Aufgabe nur auf die dafür vorgesehenen Blätter. Wenn Sie sich nicht ganz sicher sind und noch genug Zeit ist, empfiehlt es sich, die Lösung zunächst auf Schmierpapier zu schreiben. Vergessen Sie aber nicht, die Lösung rechtzeitig auf den Klausurbogen zu übertragen. Soweit nichts anderes gesagt ist, gilt folgendes:

- Alle Antworten sind mathematisch zu begründen.
- Sofern nichts anderes gesagt ist, darf dabei auf mathematische Ergebnisse aus den Vorlesungen und den Übungen zur Linearen Algebra I (WS 2009/2010) und Linearen Algebra II (SS 2010) verwiesen werden (zum Beispiel durch ein Stichwort wie „Homomorphiesatz“ oder durch kurze Beschreibung des Ergebnisses).
- Sie können die einzelnen Teilaufgaben einer Aufgabe in einer anderen als der vorgeschlagenen Reihenfolge bearbeiten und in jeder Teilaufgabe die erzielten (Zwischen-)Ergebnisse aus den vorher bearbeiteten Teilaufgaben verwenden.
- Bei Manipulation von Matrizen sind die durchgeführten Spalten- oder Zeilenoperationen stets anzugeben (im Stile der Vorlesung oder ähnlich, also etwa $Z_2 \leftrightarrow Z_4$ für Vertauschung der Zeilen 2 und 4 oder $Z_1 \leftarrow Z_1 - 7Z_2$ für Subtrahieren des 7-fachen der Zeile 2 von der Zeile 1).

Haben Sie irgendwelche Fragen, so zögern Sie nicht, sich (möglichst lautlos) bemerkbar zu machen. Ein Mitarbeiter wird zu Ihnen an den Platz kommen.

Die maximale Bearbeitungszeit beträgt 180 Minuten. Die einzigen erlaubten Hilfsmittel sind “Spickzettel”[1], Schreibzeug, Schmierpapier[2] und eine Uhr[3]. Viel Erfolg!

[1] ein beidseitig von eigener Hand beschriebenes Blatt im Format A4
[2] anfangs unbeschrieben
[3] ohne eingebaute Kommunikationsgeräte

Name: **Seite 1 zur Aufgabe 1**

erreichte Punktzahl: **Korrektor (Initialen):**

Aufgabe 1 (7 Punkte). Gibt es eine abelsche Gruppe $(G,+)$, die gleichzeitig folgende beiden Eigenschaften hat?

(1) $\#G = 5$, das heißt das Universum von $(G,+)$ hat genau fünf Elemente;

(2) $a + a = 0$ für alle $a \in G$ (wie üblich bezeichne 0 das neutrale Element der Addition).

Geben Sie ein explizites Beispiel an oder begründen Sie, warum das nicht möglich ist.

Lösung zur Aufgabe 1:

Fortsetzung der Lösung zur Aufgabe 1:

Name: **Seite 1 zur Aufgabe 2**

erreichte Punktzahl: **Korrektor (Initialen):**

Aufgabe 2 (16 Punkte). Wie in der Vorlesung bezeichne

$$\mathbb{F}_5 = \mathbb{Z}/(5) = \{0,1,2,3,4\} \qquad \text{und} \qquad \mathbb{F}_2 = \mathbb{Z}/(2) = \{0,1\}$$

den fünf- und den zweielementigen Körper (wir schreiben der Einfachheit halber für jedes $n \in \mathbb{Z}$ wieder etwas schlampig n für die Kongruenzklassen $\overline{n}^{\equiv_{(5)}}$ und $\overline{n}^{\equiv_{(2)}}$). Weiter sei

$$V := \mathbb{F}_2^{\mathbb{F}_5} = \{f \mid f : \mathbb{F}_5 \to \mathbb{F}_2\}$$

der $\mathbb{F}_2$-Vektorraum aller Abbildungen von $\mathbb{F}_5$ nach $\mathbb{F}_2$. Der Einfachheit halber kann man ein $f \in V$ als fünfstellige Binärzahl schreiben. Zum Beispiel steht 01100 für die Abbildung $f : \mathbb{F}_5 \to \mathbb{F}_2$ mit $f(0) = f(3) = f(4) = 0$ und $f(1) = f(2) = 1$. Wir definieren nun eine Relation $\sim$ auf V durch

$$f \sim g :\iff \exists s \in \mathbb{F}_5 : \forall x \in \mathbb{F}_5 : f(x) = g(x+s) \qquad (f,g \in V).$$

(a) Zeigen Sie, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf der Menge V ist.

(b) Bestimmen Sie eine Menge $B \subseteq V$ derart, dass $B \to V/\!\sim$, $f \mapsto \tilde{f}$ bijektiv ist.
(Begründung **nicht** erforderlich!)

(c) Zeigen Sie, dass $\sim$ **keine** Kongruenzrelation auf dem Vektorraum V ist.

(d) Finden Sie eine surjektive lineare Abbildung $\Phi\colon V \to \mathbb{F}_2$ mit der Eigenschaft

$$a \sim b \implies \Phi(a) = \Phi(b)$$

für alle $a,b \in V$.

(e) Finden Sie eine von $V \times V$ verschiedene Kongruenzrelation $\equiv$ auf V mit

$$a \sim b \implies a \equiv b$$

für alle $a,b \in V$.

Lösung zur Aufgabe 2:

Fortsetzung der Lösung zur Aufgabe 2:

Name: **Seite 3 zur Aufgabe 2**

Fortsetzung der Lösung zur Aufgabe 2:

Fortsetzung der Lösung zur Aufgabe 2:

Name: **Seite 1 zur Aufgabe 3**

erreichte Punktzahl: **Korrektor (Initialen):**

Aufgabe 3 (24 Punkte). Es bezeichne $V := \mathbb{R}[X]_3$ den $\mathbb{R}$-Vektorraum aller Polynome vom Grad ≤ 3 in der Unbestimmten X. Es bezeichne $\underline{v} := (1,X,X^2,X^3)$ die Basis von V bestehend aus den Monomen.

(a) Zeigen Sie, dass $\underline{w} := (w_1,w_2,w_3,w_4)$ mit

$$w_1 := 1, \quad w_2 := X, \quad w_3 := X(X-1) \quad \text{und} \quad w_4 := X(X-1)(X-2)$$

auch eine Basis von V ist.

(b) Berechnen Sie die Basiswechselmatrizen $M(\underline{v},\underline{w})$ und $M(\underline{w},\underline{v})$.

(c) Betrachten Sie nun die lineare Abbildung

$$f\colon V \to V,\ p \mapsto p(X+1) - p,$$

wobei $p(X+1) \in V$ das Polynom ist, welches aus p durch Einsetzen von $X+1$ für X hervorgeht. Berechnen Sie $M(f,\underline{w})$ und $M(f,\underline{v})$.

(d) Zeigen Sie, dass das charakteristische Polynom $\chi_f \in \mathbb{R}[T]$ von f gleich T^4 ist.

(e) Bestimmen Sie das Minimalpolynom $\mu_f \in \mathbb{R}[T]$ von f.

(f) Entscheiden Sie, ob f trigonalisierbar ist.

(g) Entscheiden Sie, ob f diagonalisierbar ist.

(h) Bestimmen Sie das Tupel $c(A) \in \mathbb{R}[T]^4$ der Elementarteiler und das Tupel $d(A) \in \mathbb{R}[T]^4$ der Determinantenteiler der charakteristischen Matrix $A := M(f,\underline{v}) - TI_4 \in \mathbb{R}[T]^{4\times 4}$.

(i) Bestimmen Sie die Smithsche Normalform $S \in \mathbb{R}[T]^{4\times 4}$ von A.

Lösung zur Aufgabe 3:

Seite 2 zur Aufgabe 3

Fortsetzung der Lösung zur Aufgabe 3:

Name: **Seite 3 zur Aufgabe 3**

Fortsetzung der Lösung zur Aufgabe 3:

Fortsetzung der Lösung zur Aufgabe 3:

Name: **Seite 5 zur Aufgabe 3**

Fortsetzung der Lösung zur Aufgabe 3:

Fortsetzung der Lösung zur Aufgabe 3:

Name: **Seite 1 zur Aufgabe 4**

erreichte Punktzahl: **Korrektor (Initialen):**

Aufgabe 4 (9 Punkte). Bezeichne $\mathbb{F}_3 = \{0,1,2\}$ (wie üblich $2 := 1+1$) den dreielementigen Körper und $\mathbb{F}_9 = \mathbb{F}_3[\mathbb{i}]$ den aus der Vorlesung bekannten neunelementigen Körper ($\mathbb{i}$ eine imaginäre Einheit). Betrachte die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & \mathbb{i} \\ -\mathbb{i} & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1+\mathbb{i} \end{pmatrix} \in \mathbb{F}_9^{3\times 3}.$$

Berechnen Sie die Determinante $\det A$ und die inverse Matrix $A^{-1} \in \mathbb{F}_9^{3\times 3}$.

Lösung zur Aufgabe 4:

Fortsetzung der Lösung zur Aufgabe 4:

Name: **Seite 3 zur Aufgabe 4**

Fortsetzung der Lösung zur Aufgabe 4:

Fortsetzung der Lösung zur Aufgabe 4:

Name: **Seite 1 zur Aufgabe 5**

erreichte Punktzahl: **Korrektor (Initialen):**

Aufgabe 5 (9 Punkte). Gegeben sei die symmetrische reelle Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ -3 & 9 & -5 \\ 1 & -5 & 1 \end{pmatrix} \in S\mathbb{R}^{3\times 3}.$$

(a) Berechnen Sie eine invertierbare Matrix $P \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ und eine Diagonalmatrix $D \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ derart, dass $A = P^T DP$.

(b) Bestimmen Sie die Sylvester-Signatur von A.

Lösung zur Aufgabe 5:

Fortsetzung der Lösung zur Aufgabe 5:

Name: **Seite 1 zur Aufgabe 6**

erreichte Punktzahl: **Korrektor (Initialen):**

Aufgabe 6 (9 Punkte). Gegeben sei die selbstadjungierte komplexe Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 2 & \mathbb{i} \\ -\mathbb{i} & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2\times 2}.$$

Berechnen Sie eine invertierbare Matrix $P \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ und eine Diagonalmatrix $D \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ derart, dass $A = P^*DP$ und $I_2 = P^*P$.

Lösung zur Aufgabe 6:

Fortsetzung der Lösung zur Aufgabe 6:

Name: **Seite 1 zur Aufgabe 7**

erreichte Punktzahl: **Korrektor (Initialen):**

Aufgabe 7 (9 Punkte). Sei K ein Körper, $n \in \mathbb{N}_0$ und $A \in K^{n \times n}$. Ist die Matrix A über K stets ähnlich zu der transponierten Matrix A^T? Begründen Sie Ihre Antwort!

Lösung zur Aufgabe 7:

Seite 2 zur Aufgabe 7

Fortsetzung der Lösung zur Aufgabe 7:

Name: **Seite 1 zur Aufgabe 8**

erreichte Punktzahl: **Korrektor (Initialen):**

Aufgabe 8 (10 Punkte). Berechnen Sie eine Jordansche Normalform der Matrix

$$A := \begin{pmatrix} -1 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

Lösung zur Aufgabe 8:

Seite 2 zur Aufgabe 8

Fortsetzung der Lösung zur Aufgabe 8:

Name: **Seite 1 zur Aufgabe 9**

erreichte Punktzahl: **Korrektor (Initialen):**

Aufgabe 9 (7 Punkte). Berechnen Sie den größten gemeinsamen Teiler $\gcd(2^{90}-1, 2^{65}-1)$ der ganzen Zahlen $2^{90}-1$ und $2^{65}-1$.

Lösung zur Aufgabe 9:

Seite 2 zur Aufgabe 9

Fortsetzung der Lösung zur Aufgabe 9: