Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik

Markus Schweighofer
22. September 2010

Klausur zur Linearen Algebra I und II (Modulklausur, Zwischenprüfung)

Familienname: Serre

Vorname: Jean-Pierre

Matrikelnummer: 2003

Übungsgruppenleiter in der Linearen Algebra I: Henri Cartan

Übungsgruppenleiter in der Linearen Algebra II: André Weil

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	$\sum$
erreichte Punktzahl	7	16	24	9	9	9	9	10	7	100
Korrektor (Initialen)										
Maximalpunktzahl	7	16	24	9	9	9	9	10	7	100

Fassen Sie den Klausurbogen nicht an, bevor die Klausur eröffnet wird!

Entfernen Sie nicht die Klammerung der Blätter. Sobald die Klausur eröffnet wird, tragen Sie auf **jeder Vorderseite sofort** Ihren Namen ein. Schreiben Sie die Lösung zu einer Aufgabe nur auf die dafür vorgesehenen Blätter. Wenn Sie sich nicht ganz sicher sind und noch genug Zeit ist, empfiehlt es sich, die Lösung zunächst auf Schmierpapier zu schreiben. Vergessen Sie aber nicht, die Lösung rechtzeitig auf den Klausurbogen zu übertragen. Soweit nichts anderes gesagt ist, gilt folgendes:

- Alle Antworten sind mathematisch zu begründen.
- Sofern nichts anderes gesagt ist, darf dabei auf mathematische Ergebnisse aus den Vorlesungen und den Übungen zur Linearen Algebra I (WS 2009/2010) und Linearen Algebra II (SS 2010) verwiesen werden (zum Beispiel durch ein Stichwort wie „Homomorphiesatz" oder durch kurze Beschreibung des Ergebnisses).
- Sie können die einzelnen Teilaufgaben einer Aufgabe in einer anderen als der vorgeschlagenen Reihenfolge bearbeiten und in jeder Teilaufgabe die erzielten (Zwischen-)Ergebnisse aus den vorher bearbeiteten Teilaufgaben verwenden.
- Bei Manipulation von Matrizen sind die durchgeführten Spalten- oder Zeilenoperationen stets anzugeben (im Stile der Vorlesung oder ähnlich, also etwa $Z_2 \leftrightarrow Z_4$ für Vertauschung der Zeilen 2 und 4 oder $Z_1 \leftarrow Z_1 - 7Z_2$ für Subtrahieren des 7-fachen der Zeile 2 von der Zeile 1).

Haben Sie irgendwelche Fragen, so zögern Sie nicht, sich (möglichst lautlos) bemerkbar zu machen. Ein Mitarbeiter wird zu Ihnen an den Platz kommen.

Die maximale Bearbeitungszeit beträgt 180 Minuten. Die einzigen erlaubten Hilfsmittel sind "Spickzettel"[1], Schreibzeug, Schmierpapier[2] und eine Uhr[3]. Viel Erfolg!

[1] ein beidseitig von eigener Hand beschriebenes Blatt im Format A4
[2] anfangs unbeschrieben
[3] ohne eingebaute Kommunikationsgeräte

Name: Jean-Pierre Serre **Seite 1 zur Aufgabe 1**

erreichte Punktzahl: 7 **Korrektor (Initialen):**

Aufgabe 1 (7 Punkte). Gibt es eine abelsche Gruppe $(G,+)$, die gleichzeitig folgende beiden Eigenschaften hat?

(1) $\#G = 5$, das heißt das Universum von $(G,+)$ hat genau fünf Elemente;

(2) $a + a = 0$ für alle $a \in G$ (wie üblich bezeichne 0 das neutrale Element der Addition).

Geben Sie ein explizites Beispiel an oder begründen Sie, warum das nicht möglich ist.

Lösung zur Aufgabe 1: Wir geben sogar zwei Lösungen.

Erste Lösung: Gäbe es so eine Gruppe, dann enthält sie wegen (1) natürlich ein Element $a \neq 0$, für welches nach (2) gilt $a + a = 0$. Aber in G darf es so ein Element nicht einmal geben (man hätte die Voraussetzungen also wesentlich schwächer und damit die Aussage stärker formulieren können). Es würde nämlich a eine zweielementige Untergruppe H von G erzeugen (siehe §2.2 der Vorlesung). Nach §2.3 der Vorlesung teilt aber die Mächtigkeit der Untergruppe H die Mächtigkeit der Gruppe G, das heißt es würde dann 2 ein Teiler von 5 sein, was absurd ist.

Zweite Lösung: Gelte Bedingung (2). Dann ist die Abbildung

$$\mathbb{F}_2 \times G \to G, \quad (\overline{n},g) \mapsto \overline{n}g := ng := \begin{cases} \overbrace{-g - \dots - g}^{n\text{-mal}} & \text{falls } n \leq 0 \\ \underbrace{g + \dots + g}_{n\text{-mal}} & \text{falls } n \geq 0 \end{cases} \qquad (n \in \mathbb{Z})$$

wohldefiniert, denn wenn $m,n \in \mathbb{Z}$ mit $\overline{m} = \overline{n}$ in $\mathbb{F}_2 = \mathbb{Z}/(2)$, so $mg = ng$ wegen (2). Jetzt ist es trivial nachzurechnen, dass die abelsche Gruppe G mit dieser Abbildung als Skalarmultiplikation zu einem $\mathbb{F}_2$-Vektorraum wird. Man muss dazu nur prüfen $1g = g$, $(\overline{m}\overline{n})g = \overline{m}(\overline{n}g)$, $(\overline{m} + \overline{n})g = \overline{m}g + \overline{n}g$ und $\overline{n}(g + h) = \overline{n}g + \overline{n}h$ für alle $m,n \in \mathbb{Z}$ und $g,h \in G$. Nun ist G ein endlich erzeugter (sogar endlicher) $\mathbb{F}_2$-Vektorraum und hat daher nach §6.2 der Vorlesung eine endliche Basis. Nach §6.3 der Vorlesung ist damit G als $\mathbb{F}_2$-Vektorraum isomorph zu $\mathbb{F}_2^n$ für ein $n \in \mathbb{N}_0$. Insbesondere gibt es eine Bijektion zwischen G und $\mathbb{F}_2^n$, das heißt G hat 2^n Elemente. Dies ist nicht mit Bedingung (1) vereinbar.

Name: Jean-Pierre Serre **Seite 1 zur Aufgabe 2**

erreichte Punktzahl: 16 **Korrektor (Initialen):**

Aufgabe 2 (16 Punkte). Wie in der Vorlesung bezeichne

$$\mathbb{F}_5 = \mathbb{Z}/(5) = \{0,1,2,3,4\} \qquad \text{und} \qquad \mathbb{F}_2 = \mathbb{Z}/(2) = \{0,1\}$$

den fünf- und den zweielementigen Körper (wir schreiben der Einfachheit halber für jedes $n \in \mathbb{Z}$ wieder etwas schlampig n für die Kongruenzklassen $\overset{\equiv_{(5)}}{n}$ und $\overset{\equiv_{(2)}}{n}$). Weiter sei

$$V := \mathbb{F}_2^{\mathbb{F}_5} = \{f \mid f : \mathbb{F}_5 \to \mathbb{F}_2\}$$

der $\mathbb{F}_2$-Vektorraum aller Abbildungen von $\mathbb{F}_5$ nach $\mathbb{F}_2$. Der Einfachheit halber kann man ein $f \in V$ als fünfstellige Binärzahl schreiben. Zum Beispiel steht 01100 für die Abbildung $f : \mathbb{F}_5 \to \mathbb{F}_2$ mit $f(0) = f(3) = f(4) = 0$ und $f(1) = f(2) = 1$. Wir definieren nun eine Relation $\sim$ auf V durch

$$f \sim g :\iff \exists s \in \mathbb{F}_5 : \forall x \in \mathbb{F}_5 : f(x) = g(x+s) \qquad (f,g \in V).$$

(a) Zeigen Sie, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf der Menge V ist.

(b) Bestimmen Sie eine Menge $B \subseteq V$ derart, dass $B \to V/\!\sim$, $f \mapsto \tilde{f}$ bijektiv ist. (Begründung **nicht** erforderlich!)

(c) Zeigen Sie, dass $\sim$ **keine** Kongruenzrelation auf dem Vektorraum V ist.

(d) Finden Sie eine surjektive lineare Abbildung $\Phi\colon V \to \mathbb{F}_2$ mit der Eigenschaft

$$a \sim b \implies \Phi(a) = \Phi(b)$$

für alle $a,b \in V$.

(e) Finden Sie eine von $V \times V$ verschiedene Kongruenzrelation $\equiv$ auf V mit

$$a \sim b \implies a \equiv b$$

für alle $a,b \in V$.

Lösung zur Aufgabe 2: (a) Zu zeigen ist, dass $\sim$ reflexiv, transitiv und symmetrisch ist.

Zur Reflexivität: Sei $f \in V$. Zu zeigen: $f \sim f$. Setze $s := 0$. Dann gilt $f(x) = f(x+s)$ für alle $x \in \mathbb{F}_5$.

Zur Transitivität: Seien $f,g,h \in V$ mit $f \sim g$ und $g \sim h$. Zu zeigen: $f \sim h$. Wähle $s,t \in \mathbb{F}_5$ mit $f(x) = g(x+s)$ und $g(x) = h(x+t)$ für alle $x \in \mathbb{F}_5$. Mit $u := s+t \in \mathbb{F}_5$ gilt dann $f(x) = g(x+s) = h((x+s)+t) = h(x+(s+t)) = h(x+u)$ für alle $x \in \mathbb{F}_5$. Also $f \sim h$.

Zur Symmetrie. Seien $f,g \in V$ mit $f \sim g$. Zu zeigen: $g \sim f$. Wähle $s \in \mathbb{F}_5$ mit $f(x) = g(x+s)$ für alle $x \in \mathbb{F}_5$. Setze $t := -s$. Dann gilt $g(x) = g(x+(t+s)) = g((x+t)+s) = f(x+t)$ für alle $x \in \mathbb{F}_5$. Daher $g \sim f$.

(b) Man kann $B := \{00000,10000,11000,10100,11100,11010,11110,11111\}$ nehmen. Die Intuition dahinter sind Halsbänder (englisch: necklaces), siehe:

`http://en.wikipedia.org/wiki/Necklace_(combinatorics)`

(c) Nehme $f_1 := 10000$, $f_2 := 01000$ und $g := 00100$. Dann gilt $f_1 \sim f_2$ und $g \sim g$, aber $f_1 + g = 10100 \not\sim 01100 = f_2 + g$.

(d) Nehme die „Quersummenabbildung" $\Phi\colon V \to \mathbb{F}_2$, $f \mapsto \sum_{x\in\mathbb{F}_5} f(x)$.

(e) Setze $U := \ker\Phi$ und $(\equiv) := (\equiv_U) = (\equiv_\Phi)$. Sind $a,b \in V$ mit $a \sim b$, so gilt $\Phi(a) = \Phi(b)$ nach (d), also $a - b \in U$, das heißt $a \equiv b$.

Name: Jean-Pierre Serre **Seite 1 zur Aufgabe 3**

erreichte Punktzahl: 24 **Korrektor (Initialen):**

Aufgabe 3 (24 Punkte). Es bezeichne $V := \mathbb{R}[X]_3$ den $\mathbb{R}$-Vektorraum aller Polynome vom Grad ≤ 3 in der Unbestimmten X. Es bezeichne $\underline{v} := (1,X,X^2,X^3)$ die Basis von V bestehend aus den Monomen.

(a) Zeigen Sie, dass $\underline{w} := (w_1,w_2,w_3,w_4)$ mit

$$w_1 := 1, \quad w_2 := X, \quad w_3 := X(X-1) \quad \text{und} \quad w_4 := X(X-1)(X-2)$$

auch eine Basis von V ist.

(b) Berechnen Sie die Basiswechselmatrizen $M(\underline{v},\underline{w})$ und $M(\underline{w},\underline{v})$.

(c) Betrachten Sie nun die lineare Abbildung

$$f\colon V \to V,\ p \mapsto p(X+1) - p,$$

wobei $p(X+1) \in V$ das Polynom ist, welches aus p durch Einsetzen von $X+1$ für X hervorgeht. Berechnen Sie $M(f,\underline{w})$ und $M(f,\underline{v})$.

(d) Zeigen Sie, dass das charakteristische Polynom $\chi_f \in \mathbb{R}[T]$ von f gleich T^4 ist.

(e) Bestimmen Sie das Minimalpolynom $\mu_f \in \mathbb{R}[T]$ von f.

(f) Entscheiden Sie, ob f trigonalisierbar ist.

(g) Entscheiden Sie, ob f diagonalisierbar ist.

(h) Bestimmen Sie das Tupel $c(A) \in \mathbb{R}[T]^4$ der Elementarteiler und das Tupel $d(A) \in \mathbb{R}[T]^4$ der Determinantenteiler der charakteristischen Matrix $A := M(f,\underline{v}) - TI_4 \in \mathbb{R}[T]^{4\times 4}$.

(i) Bestimmen Sie die Smithsche Normalform $S \in \mathbb{R}[T]^{4\times 4}$ von A.

Lösung zur Aufgabe 3: (a) Da w_1,w_2,w_3,w_4 Polynome ungleich null von paarweise verschiedenem Grad sind, sind sie offensichtlich linear unabhängig. Wegen $\dim V = 4$ bilden sie eine Basis von V.

(b) In der i-ten Spalte der Basiswechselmatrix $M(\underline{w},\underline{v})$ stehen die Koordinaten von w_i bezüglich der Basis $\underline{v}$. Wegen

$$\begin{aligned}
w_1 &= 1\cdot 1 + 0\cdot X + 0\cdot X^2 + 0\cdot X^3\\
w_2 &= 0\cdot 1 + 1\cdot X + 0\cdot X^2 + 0\cdot X^3\\
w_3 &= 0\cdot 1 - 1\cdot X + 1\cdot X^2 + 0\cdot X^3\\
w_4 &= 0\cdot 1 + 2\cdot X - 3\cdot X^2 + 1\cdot X^3
\end{aligned}$$

gilt also

$$M(\underline{w},\underline{v}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 2\\ 0 & 0 & 1 & -3\\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Wir invertieren nun $M(\underline{w},\underline{v})$, um $M(\underline{v},\underline{w}) = M(\underline{w},\underline{v})^{-1}$ zu erhalten:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -3 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{Z_3 \leftarrow Z_3 + 3Z_4}{\overset{Z_2 \leftarrow Z_2 + Z_3}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\overset{Z_2 \leftarrow Z_2 + Z_4}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Seite 2 zur Aufgabe 3

Fortsetzung der Lösung zur Aufgabe 3: Es gilt also

$$M(\underline{v},\underline{w}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(c) Es ist f eine Art diskreter Ableitungsoperator. Genauso wie die Ableitung der Potenz X^k ($k \in \mathbb{N}$) gleich kX^{k-1} ist, so ist f angewandt auf eine „fallende Potenz"

$$X^{\underline{k}} := X(X-1)\cdots(X-k+1)$$

(hier $k \in \{1,2,3\}$, aber hätte man f auf ganz $\mathbb{R}[X]$ definiert, so könnte man auch $k \in \mathbb{N}$ betrachten) gleich

$$(X+1)^{\underline{k}} - X^{\underline{k}} = ((X+1)-(X-k+1))X^{\underline{k-1}} = kX^{\underline{k-1}}.$$

Insbesondere

$$f(w_4) = 3w_3, \quad f(w_3) = 2w_2, \quad f(w_2) = w_1 \quad \text{und} \quad f(w_1) = 0. \tag{1}$$

Daher

$$M(f,\underline{w}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

und

$$\begin{aligned} M(f,\underline{v}) = M(\underline{w},\underline{v})M(f,\underline{w})M(\underline{v},\underline{w}) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Alternativ kann man natürlich $M(f,\underline{v})$ auch direkt ohne Benutzung der Basiswechselmatrizen berechnen (ist vielleicht sogar einfacher).

(d) Es gilt

$$\chi_f = \det(M(f,\underline{w}) - TI_4) = \det \begin{pmatrix} -T & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -T & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -T & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -T \end{pmatrix} = (-T)^4 = T^4,$$

denn die charakteristische Matrix $M(f,\underline{w}) - TI_4$ ist in oberer Dreiecksgestalt.

(e) Nach Cayley-Hamilton ist das Minimalpolynom μ_f ein Teiler des charakteristischen Polynoms χ_f in $\mathbb{R}[T]$. Wegen $\chi_f = T^4$ sieht man sehr leicht $\mu_f = T^k$ für ein $k \in \{1,2,3,4\}$. Dann $f^k(w_4) = (\mu_f(f))(w_4) = 0(w_4) = 0$, woraus wegen (1) folgt $k = 4$. Also $\mu_f = T^4$.

(f) Selbstverständlich ist f trigonalisierbar, denn zum Beispiel $M(f,\underline{w})$ ist in oberer Dreiecksgestalt.

(g) Der Eigenwert 0 von f hat die algebraische Vielfachheit 4, denn $\chi_f = (T-0)^4$. Wäre f diagonalisierbar, so wäre auch die geometrische Vielfachheit des Eigenwertes 0 gleich 4. Damit wäre der Eigenraum zum Eigenwert 0, was ja nichts anderes als der Kern von f ist, ganz V. Dann wäre $f = 0$, was absurd ist. Es ist also f nicht diagonalisierbar.

(h) Nach §17.5 der Vorlesung gilt $c(A) = c(M(f,\underline{v}) - XI_4) = (c_1,c_2,c_3,\mu_{M(f,\underline{v})})$ für gewisse normierte $c_1,c_2,c_3 \in \mathbb{R}[T]$ und $\chi_{M(f,\underline{v})} = c_1c_2c_3\mu_{M(f,\underline{v})}$. Wegen $\chi_{M(f,\underline{v})} = \chi_f = \mu_f = \mu_{M(f,\underline{v})}$ folgt $c_1 = c_2 = c_3 = 1$, also

$$c(A) = (1,1,1,T^4)$$

und daher mit §17.3 (Zusammenhang von Elementar- und Determinantenteilern) natürlich

$$d(A) = (1,1,1,T^4).$$

(i) ergibt sich sofort aus (h): S ist Diagonalmatrix mit den Diagonaleinträgen $c(A) = (1,1,1,T^4)$.

Name: Jean-Pierre Serre **Seite 1 zur Aufgabe 4**

erreichte Punktzahl: 9 **Korrektor (Initialen):**

Aufgabe 4 (9 Punkte). Bezeichne $\mathbb{F}_3 = \{0,1,2\}$ (wie üblich $2 := 1+1$) den dreielementigen Körper und $\mathbb{F}_9 = \mathbb{F}_3[\mathbb{i}]$ den aus der Vorlesung bekannten neunelementigen Körper ($\mathbb{i}$ eine imaginäre Einheit). Betrachte die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & \mathbb{i} \\ -\mathbb{i} & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1+\mathbb{i} \end{pmatrix} \in \mathbb{F}_9^{3\times 3}.$$

Berechnen Sie die Determinante $\det A$ und die inverse Matrix $A^{-1} \in \mathbb{F}_9^{3\times 3}$.

Lösung zur Aufgabe 4: Es gilt

$$(A \mid I_3) \underset{Z_3 \leftarrow Z_3 - Z_1}{\overset{Z_2 \leftarrow Z_2 + \mathbb{i} Z_1}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & \mathbb{i} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2+2\mathbb{i} & 0 & \mathbb{i} & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{Z_2 \leftarrow Z_2 + (2+2\mathbb{i}) Z_3}{\overset{Z_1 \leftarrow Z_1 + 2Z_3}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2+\mathbb{i} & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2+2\mathbb{i} & 1+2\mathbb{i} & 1 & 2+2\mathbb{i} \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\underset{\substack{Z_2 \leftarrow (1-\mathbb{i}) Z_2 \\ Z_3 \leftarrow -Z_3}}{\overset{\frac{1}{2+2\mathbb{i}} = \frac{2-2\mathbb{i}}{(2+2\mathbb{i})(2-2\mathbb{i})} = \frac{2-2\mathbb{i}}{4+4} = \frac{2-2\mathbb{i}}{2} = 1-\mathbb{i}}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2+\mathbb{i} & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & \mathbb{i} & 1+2\mathbb{i} & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\underset{Z_1 \leftarrow Z_1 - (2+\mathbb{i}) Z_2}{\overset{Z_3 \leftarrow Z_3 + Z_2}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \mathbb{i} & \mathbb{i} & 2\mathbb{i} \\ 0 & 0 & 1 & \mathbb{i} & 1+2\mathbb{i} & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1+\mathbb{i} & 1+2\mathbb{i} & 0 \end{pmatrix} \overset{Z_2 \leftrightarrow Z_3}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \mathbb{i} & \mathbb{i} & 2\mathbb{i} \\ 0 & 1 & 0 & 1+\mathbb{i} & 1+2\mathbb{i} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & i & 1+2\mathbb{i} & 1 \end{pmatrix} = (I_3 \mid A^{-1}),$$

also

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbb{i} & \mathbb{i} & 2\mathbb{i} \\ 1+\mathbb{i} & 1+2\mathbb{i} & 0 \\ i & 1+2\mathbb{i} & 1 \end{pmatrix}.$$

Um die Determinante von A zu berechnen, blicken wir noch einmal zurück: Wir haben gerade insbesondere A in I_3 durch elementare Zeilenoperationen übergeführt. Die einzigen dabei benutzten Zeilenoperationen, die die Determinante dabei veränderten, waren in dieser Reihenfolge:

$$Z_2 \leftarrow (1-\mathbb{i}) Z_2$$
$$Z_3 \leftarrow -Z_3$$
$$Z_2 \leftrightarrow Z_3$$

Es folgt $\det A = \frac{1}{1-\mathbb{i}}(-1)(-1)\det I_3 = \frac{1}{1-\mathbb{i}} = \frac{1+\mathbb{i}}{(1-\mathbb{i})(1+\mathbb{i})} = \frac{1+\mathbb{i}}{2} = -1-\mathbb{i} = 2+2\mathbb{i}$.

Name: Jean-Pierre Serre **Seite 1 zur Aufgabe 5**

erreichte Punktzahl: 9 **Korrektor (Initialen):**

Aufgabe 5 (9 Punkte). Gegeben sei die symmetrische reelle Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ -3 & 9 & -5 \\ 1 & -5 & 1 \end{pmatrix} \in S\mathbb{R}^{3\times 3}.$$

(a) Berechnen Sie eine invertierbare Matrix $P \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ und eine Diagonalmatrix $D \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ derart, dass $A = P^T DP$.

(b) Bestimmen Sie die Sylvester-Signatur von A.

Lösung zur Aufgabe 5: (a) Wir benutzen folgenden Satz aus §13.5 der Vorlesung: Sei K ein Körper mit $2 \neq 0$ in K. Sei V ein K-Vektorraum mit Basis $\underline{v} = (v_1,\dots,v_n)$ und q eine quadratische Form auf V. Seien $\ell_1,\dots,\ell_n$ Linearformen auf V und $\lambda_1,\dots,\lambda_n \in K$. Dann sind äquivalent:

(i) $\ell_1,\dots,\ell_n$ sind linear unabhängig in algebraischen Dualraum von V und

$$q(v) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_k \ell_k(v)^2 \qquad \text{für alle } v \in V.$$

(ii) $P := (\ell_i(v_j))_{1\le i,j\le n} \in K^{n\times n}$ ist invertierbar und $M(q,\underline{v}) = P^T DP$, wobei D die Diagonalmatrix mit Diagonaleinträgen $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ ist.

In unserer Anwendung ist $K := \mathbb{R}$, $V := \mathbb{R}^3$, $\underline{v} := \underline{e}$ die Standardbasis von $\mathbb{R}^3$, $n = 3$,

$$q(x) = x_1^2 - 6x_1x_2 + 2x_1x_3 + 9x_2^2 - 10x_2x_3 + x_3^2 \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^3$$

(also $M(q,\underline{v}) = A$) und wir suchen also linear unabhängige $\ell_1,\ell_2,\ell_3 \in V^*$ sowie $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3 \in \mathbb{R}$ mit $q(x) = \lambda_1\ell_1(x)^2 + \lambda_2\ell_2(x)^2 + \lambda_3\ell_3(x)^2$ für alle $x \in \mathbb{R}^3$, um Bedingung (i) zu erfüllen. Aus der Vorlesung wissen wir, wie man diese Daten findet, als wir uns in §13.5 überlegt haben, wie man eine verallgemeinerte Cholesky-Zerlegung findet (was genau das ist, was zu tun ist, wobei man hofft, dass man keine Permutationsmatrix braucht). Es handelt sich um folgende Tricks der „quadratischen Ergänzung“:

$$q(x) = \underbrace{1}_{\lambda_1}(\underbrace{x_1 - 3x_2 + x_3}_{\ell_1(x_1,x_2,x_3)})^2 \underbrace{-(-3x_2 + x_3)^2 + 9x_2^2 - 10x_2x_3 + x_3^2}_{q_1(x_2,x_3)}$$

$$q_1(x) = -4 \underbrace{x_2}_{h_1(x_2,x_3)} \underbrace{x_3}_{h_2(x_2,x_3)} = -\frac{4}{4}((\underbrace{h_1(x) + h_2(x)}_{\ell_2(x_2,x_3)})^2 - (\underbrace{h_1(x) - h_2(x)}_{\ell_3(x_2,x_3)})^2)$$

$$= \underbrace{-1}_{\lambda_2}\ell_2(x)^2 + \underbrace{1}_{\lambda_3}\ell_3(x)^2.$$

Wir haben nun $q(x) = \lambda_1\ell_1(x)^2 + q_1(x) = \lambda_1\ell_1(x)^2 + \lambda_2\ell_2(x)^2 + \lambda_3\ell_3(x)^2$ für alle $x \in \mathbb{R}^3$ wie gewünscht, wobei $\ell_1(x) = x_1 - 3x_2 + x_3$, $\ell_2(x) = h_1(x) + h_2(x) = x_2 + x_3$ und $\ell_3(x) = h_1(x) - h_2(x) = x_2 - x_3$ für alle $x \in \mathbb{R}^3$. Aus (ii) erhalten wir nun mit

$$P := \begin{pmatrix} \ell_1(e_1) & \ell_1(e_2) & \ell_1(e_3) \\ \ell_2(e_1) & \ell_2(e_2) & \ell_2(e_3) \\ \ell_3(e_1) & \ell_3(e_2) & \ell_3(e_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad D := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

dass $A = P^T DP$.

(b) Nach §14.1 der Vorlesung ist die Sylvester-Signatur von $A = M(q,\underline{v})$ gleich der Sylvester-Signatur von q und letztere ergibt sich durch Zählen der positiven und negativen Diagonaleinträge von D. Da D zwei positive und einen negativen Diagonaleintrag hat, ist die Sylvester-Signatur von A gleich (2,1).

Name: Jean-Pierre Serre **Seite 1 zur Aufgabe 6**

erreichte Punktzahl: 9 **Korrektor (Initialen):**

Aufgabe 6 (9 Punkte). Gegeben sei die selbstadjungierte komplexe Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 2 & \mathbb{i} \\ -\mathbb{i} & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2\times 2}.$$

Berechnen Sie eine invertierbare Matrix $P \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ und eine Diagonalmatrix $D \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ derart, dass $A = P^*DP$ und $I_2 = P^*P$.

Lösung zur Aufgabe 6: Es gilt

$$\chi_A = \det(A - XI_2) = (2-X)(2-X) - (-\mathbb{i})\mathbb{i} = (X-2)^2 + \mathbb{i}^2 = X^2 - 4X + 3.$$

Die Nullstellen von χ_A sind also

$$\frac{4 \pm \sqrt{16-12}}{2} = 2 \pm 1,$$

also 1 und 3. Da die 2×2-Matrix A zwei verschiedene Eigenwerte hat und Eigenvektoren von selbstadjungierten Abbildungen zu verschiedenen Eigenwerten senkrecht aufeinander stehen, reicht es, zu jedem der beiden Eigenwerte einen Eigenvektor zu bestimmen. Die beiden Eigenvektoren kann man dann zu einem Orthonormalsystem „stutzen“, welches automatisch eine Orthonormalbasis ist.

Offensichtlich ist $w_1 := \begin{pmatrix} -\mathbb{i} \\ 1 \end{pmatrix}$ ein Eigenvektor von A zum Eigenwert 1 und $w_2 := \begin{pmatrix} \mathbb{i} \\ 1 \end{pmatrix}$ ein Eigenvektor zum Eigenwert 3. Es gilt $\|w_1\| = \sqrt{\mathbb{i}(-\mathbb{i})+1} = \sqrt{2} = \sqrt{(-\mathbb{i})\mathbb{i}+1} = \|w_2\|$, weshalb wir

$$v_1 := \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \mathbb{i} \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad v_2 := \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -\mathbb{i} \\ 1 \end{pmatrix}$$

setzen, um $\|v_1\| = \|v_2\| = 1$ zu erreichen. Es ist $\underline{v} := (v_1, v_2)$ eine aus Eigenvektoren von A bestehende Orthonormalbasis des $\mathbb{C}^2$. Daher ist

$$D := M(f_A, \underline{v}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

eine Diagonalmatrix und $P := M(\underline{e}, \underline{v})$ eine orthogonale Matrix, das heißt $I_2 = P^*P$. Ferner gilt

$$A = M(f_A, \underline{e}) = M(\underline{v}, \underline{e}) M(f_A, \underline{v}) M(\underline{e}, \underline{v}) = P^{-1}DP = P^*DP$$

mit

$$P := (P^*)^* = (P^{-1})^* = M(\underline{v}, \underline{e})^* = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -\mathbb{i} & \mathbb{i} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^* = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \mathbb{i} & 1 \\ -\mathbb{i} & 1 \end{pmatrix}.$$

Name: Jean-Pierre Serre **Seite 1 zur Aufgabe 7**

erreichte Punktzahl: 9 **Korrektor (Initialen):**

Aufgabe 7 (9 Punkte). Sei K ein Körper, $n \in \mathbb{N}_0$ und $A \in K^{n\times n}$. Ist die Matrix A über K stets ähnlich zu der transponierten Matrix A^T? Begründen Sie Ihre Antwort!

Lösung zur Aufgabe 7: Ja, es gilt stets $A \approx A^T$. Nach dem Hauptergebnis aus §17.4 der Vorlesung reicht es hierfür zu zeigen, dass die zugehörigen charakteristischen Matrizen $A - XI_n$ und $A^T - XI_n = (A - XI_n)^T$ dieselbe Smithsche Normalform haben. Dies folgt aber aus der folgenden ganz allgemeinen Tatsache:

Sei A ein Hauptidealring, $n \in \mathbb{N}_0$ und $M \in A^{n\times n}$. Dann ist M zeilenspaltenäquivalent zu M^T, in Zeichen $M \sim M^T$.

Begründung: Nach §17.3 der Vorlesung gilt $M \sim M^T \iff d(M) = d(M^T)$. Fixieren wir $k \in \{1,\ldots,n\}$, so ist also $d_k(M) = d_k(M^T)$ zu zeigen. Nun haben aber M und M^T offenbar dieselben Minoren der Ordnung k, denn die Untermatrix aus der ein solcher Minor gebildet wird findet sich in transponierter Form auch in der transponierten Matrix und die Determinante ändert sich durch Transponieren nicht. Insbesondere haben M und M^T dasselbe k-te Minorenideal, woraus $d_k(M) = d_k(M^T)$ folgt.

Name: Jean-Pierre Serre **Seite 1 zur Aufgabe 8**

erreichte Punktzahl: 10 **Korrektor (Initialen):**

Aufgabe 8 (10 Punkte). Berechnen Sie eine Jordansche Normalform der Matrix

$$A := \begin{pmatrix} -1 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

Lösung zur Aufgabe 8: Die charakteristische Matrix von A lautet

$$M := \begin{pmatrix} -1-X & 1 & -4 \\ 0 & 1-X & 1 \\ 0 & -1 & 3-X \end{pmatrix}.$$

Der erste Determinantenteiler von M ist der größte gemeinsame Teiler in $\mathbb{R}[X]$ aller Einträge (=Minoren erster Ordnung) von M, also offensichtlich $d_1(M) = 1$. Der zweite Determinantenteiler teilt unter anderem

$$\det \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 1-X & 1 \end{pmatrix} = 1 + 4(1-X) = 5 - 4X \qquad \text{und} \qquad \det \begin{pmatrix} -1-X & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = 1 + X,$$

woraus sogleich auch $d_2(M) = 1$ folgt. Schließlich gilt

$$\begin{aligned} d_3(M) = (-1)^3 \det M &= (1+X) \det \begin{pmatrix} 1-X & 1 \\ -1 & 3-X \end{pmatrix} \\ &= (1+X)((1-X)(3-X)+1) = (X+1)(X^2-4X+4) = X^3 - 3X^2 + 4. \end{aligned}$$

Insgesamt $d(M) = (1,1,X^3 - 3X^2 + 4)$, woraus folgt für die Elementarteiler von M folgt

$$c(M) = (1,1,X^3 - 3X^2 + 4).$$

Um die Jordansche Normalform zu bestimmen, muss man die Elementarteiler als Produkt von Linearfaktoren schreiben, was durch

$$X^3 - 3X^2 + 4 = (X+1)(X^2 - 4X + 4) = (X+1)(X-2)^2$$

erledigt ist. Zu jedem Linearfaktor in jedem Elementarteiler gibt es ein Jordankästchen, dessen Größe durch die Vielfachheit dieses Linearfaktors gegeben ist. Hier haben wir also ein Jordankästchen der Größe 1 zum Eigenwert -1 und ein Jordankästchen der Größe 2 zum Eigenwert 2, das heißt die Jordansche Normalform von A ist

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Name: Jean-Pierre Serre **Seite 1 zur Aufgabe 9**

erreichte Punktzahl: 7 **Korrektor (Initialen):**

Aufgabe 9 (7 Punkte). Berechnen Sie den größten gemeinsamen Teiler $\gcd(2^{90}-1, 2^{65}-1)$ der ganzen Zahlen $2^{90}-1$ und $2^{65}-1$.

Lösung zur Aufgabe 9: Der gesuchte größte gemeinsame Teiler ist der eindeutig bestimmte nichtnegative Erzeuger des von $2^{90}-1$ und $2^{65}-1$ in $\mathbb{Z}$ erzeugten Ideals. Wir benutzen den ersten Satz aus §16.3 der Vorlesung, um diesen Erzeuger zu berechnen:

$$\begin{aligned}(2^{90}-1, 2^{65}-1) &= (2^{65}2^{25}-1, 2^{65}-1) = (2^{25}-1, 2^{65}-1) = (2^{25}-1, 2^{15}-1)\\ &= (2^{10}-1, 2^{15}-1) = (2^{10}-1, 2^{5}-1) = (1-1, 2^{5}-1) = (2^{5}-1) = (32-1) = (31),\end{aligned}$$

also $\gcd(2^{90}-1, 2^{65}-1) = 31$.