Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Markus Schweighofer
Dr. Sven Wagner

Sommersemester 2010
Lösungsblatt 26
03.08.2010

Lineare Algebra II

Lösung 26.1:

Behauptung: Keine zwei der drei folgenden Matrizen aus $\mathbb{Q}^{2\times 2}$ sind ähnlich.

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad C := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Beweis: Das sieht man schon daran, dass sie alle unterschiedliche charakteristische Polynome haben:

$$\chi_A = (X-1)^2, \quad \chi_B = X^2 - 2X - 1, \quad \chi_C = (X-1)(X-2).$$

Betrachtet man allerdings z.B. statt B die Matrix

$$B' := \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix},$$

so haben A und B' das gleiche charakteristische Polynom. Nun kann man die Smithsche Normalformen der zugehörigen charakteristischen Matrizen betrachten.

Für A:

$$\begin{pmatrix} 1-X & 2 \\ 0 & 1-X \end{pmatrix} \quad S_1 \leftarrow S_1 + \tfrac{1}{2}XS_2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ \frac{1}{2}X - \frac{1}{2}X^2 & 1-X \end{pmatrix} \quad Z_2 \leftarrow Z_2 + \tfrac{1}{2}(X^2 - X)Z_1$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & X^2 - 2X + 1 \end{pmatrix} \quad S_2 \leftarrow S_2 - 2S_1$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & X^2 - 2X + 1 \end{pmatrix}$$

Für B':

$$\begin{pmatrix} 3-X & -2 \\ 2 & -1-X \end{pmatrix} \quad Z_1 \leftarrow Z_1 + \tfrac{1}{2}(X-3)Z_2$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 - \frac{1}{2}(X-3)(X+1) \\ 2 & -1-X \end{pmatrix} \quad S_2 \leftarrow S_2 + \tfrac{1}{2}(X+1)S_1$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 - \frac{1}{2}(X-3)(X+1) \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \quad Z_1 \leftrightarrow Z_2$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 - \frac{1}{2}(X-3)(X+1) \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} S_1 \leftarrow \frac{1}{2}S_1 \\ Z_2 \leftarrow 2Z_2 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & X^2 - 2X + 1 \end{pmatrix}$$

Die beiden Smithschen Normalformen sind gleich, somit sind A und B' ähnlich. Um die Matrix R mit $B' = R^{-1}AR$ zu bestimmen, wenden wir laut Vorlesung im ersten Schritt auf die Einheitsmatrix I_2 zuerst die gleichen Zeilenoperationen zur Bestimmung der Smithschen Normalform von $B' - XI_2$ an, gefolgt von den inversen Operationen der Zeilenoperationen zur Bestimmung der Smithschen Normalform von $A - XI_2$ in umgekehrter Reihenfolge:

$$\begin{array}{rl}
\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & Z_1 \leftarrow Z_1 + \frac{1}{2}(X-3)Z_2 \\
\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2}(X-3) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & Z_1 \leftrightarrow Z_2 \\
\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & \frac{1}{2}(X-3) \end{pmatrix} & \begin{array}{l} S_1 \leftarrow \frac{1}{2}S_1 \\ Z_2 \leftarrow 2Z_2 \end{array} \\
\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & X-3 \end{pmatrix} & Z_2 \leftarrow Z_2 - \frac{1}{2}(X^2 - X)Z_1 \\
\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -\frac{1}{2}X^2 + \frac{3}{2}X - 3 \end{pmatrix} &
\end{array}$$

Im zweiten Schritt schreiben wir die soeben erhaltene Matrix als Matrixpolynom und führen danach die Linkseinsetzung von A in dieses Matrixpolynom durch.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -\frac{1}{2}X^2 + \frac{3}{2}X - 3 \end{pmatrix} = X^2 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} + X \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$$

Es ist somit

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Probe:

$$R^{-1}AR = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Lösung 26.2:

Es sind alle Ähnlichkeitsklassen in $(\mathbb{F}_2)^2$ zu bestimmen. Da in jeder Ähnlichkeitsklasse genau eine Matrix in Frobenius'scher Normalform vorkommt, bestimmt man zunächst einmal diese. Es können höchstens folgende charakteristische Polynome vorkommen:

$$X \cdot X = X^2,\ (X+1)(X+1) = X^2 + 1,\ X^2 + X,\ X^2 + X + 1.$$

Dabei entsprechen obige Produkte genau den Tupeln von Polynomen, die in der Definition der Normalform von Frobenius vorkommen. Somit sind genau die folgenden Matrizen in Frobenius'scher Normalform:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Nun bestimmen wir jeweils noch, welche anderen Matrizen in den Ähnlichkeitsklassen dieser Matrizen liegen. Die Klassen der Nullmatrix und der Einheitsmatrix enthalten jeweils nur ein Element. Nun erweitern wir die bestehenden Klassen, indem wir auf die darin enthaltenen Matrizen A wiederholt Operationen der Form $B^{-1}AB$ mit B invertierbar durchführen. Die von der Einheitsmatrix verschiedenen invertierbaren Matrizen sind:

$$B_1 = B_1^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_2 = B_3^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B_3 = B_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$B_4 = B_4^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B_5 = B_5^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Wir bestimmen nun die erste Ähnlichkeitsklasse:

$$B_1^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = B_2^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} B_2,$$

$$B_3^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} B_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = B_2^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} B_2.$$

Die restlichen Operationen ergeben keine neuen Elemente in dieser Klasse. Sie besteht also aus:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Die nächste Klasse:

$$B_2^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B_3^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} B_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Auch hier kommen nun keine weitere hinzu, und wir haben:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Weiter geht es:

$$B_1^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_2^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B_3^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} B_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$B_2^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B_3^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} B_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

In dieser Klasse sind also:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Da in den bisher bestimmtenn Klassen schon 14 der insgesamt 16 Matrizen liegen, können sich in der letzen Klasse nur noch zwei Matrizen befinden:

$$B_1^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Diese Klasse besteht also aus folgenden Matrizen:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Wir haben somit alle Ähnlichkeitsklassen bestimmt.

Lösung 26.3:

Voraussetzung: Sei K ein Körper.

Behauptung: Zwei Matrizen aus $K^{3\times 3}$ sind genau dann ähnlich sind, wenn sie das gleiche charakteristische Polynom und das gleiche Minimalpolynom haben.

Beweis: Zwei Matrizen aus $K^{3\times 3}$ sind genau dann ähnlich, wenn sie die gleiche Frobenius'sche Normalform besitzen.
Seien nun zwei Matrizen ähnlich. Dann besagt § 17.4 aus der Vorlesung, dass das Tupel der Elementarteiler der charakteristischen Matrix bei beiden Matrizen gleich ist. Satz zur Normalform von Frobenius (§ 17.5): Das letzte Polynom in diesem Tupel ist das Minimalpolynom der jeweils betrachteten Matrix. Somit haben beide Matrizen das gleiche Minimalpolynom. Das Produkt der Polynome aus dem Tupel ist aber das negierte charakteristische Polynom der jeweils betrachteten Matrix. Also haben beide Matrizen auch das gleiche charakteristische Polynom.
Seien nun zwei Matrizen gegeben deren charakteristische Polynome und deren Minimalpolynome jeweils gleich sind. Wir betrachten nun wieder die beiden Tupel der Elementarteiler der charakteristischen Matrizen. Diese seien etwa (p_1, p_2, p_3) und (q_1, q_2, q_3) mit $p_1, \ldots, q_3 \in K[X]$ normiert, $p_1 \mid p_2 \mid p_3$, $q_1 \mid q_2 \mid q_3$. Zu zeigen ist, dass diese gleich sind. Wir wissen nun schon, dass

$$p_1p_2p_3 = q_1q_2q_3 \quad \text{und} \quad p_3 = q_3$$

gilt. Man beachte, dass der Grad der beiden Produkte gleich 3 ist. Ist $\deg p_3 = \deg q_3 = 3$, so können p_1, p_2, q_1 und q_2 nur Grad 0 haben. Sie müssen also alle gleich 1 sein. Ist $\deg p_3 = \deg q_3 = 2$, so müssen p_2 und q_2 Grad 1 und p_1 und q_1 Grad 0 haben. Da der Polynomring $K[X]$ ein Integritätsbereich ist, dürfen wir kürzen. Somit ist $p_2 = p_1p_2 = q_1q_2 = q_2$, da $p_1 = q_1 = 1$ gilt. Ist $\deg p_3 = \deg q_3 = 1$, so müssen alle anderen Polynome auch Grad 1 haben. Ein normiertes lineares Polynom teilt aber ein anderes normiertes lineares Polynom genau dann, wenn die beiden Polynome gleich sind. Somit gilt $p_1 = p_2 = p_3 = q_3 = q_2 = q_1$.

Lösung 26.4:

Voraussetzung: Gegeben sei die folgende Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{3\times 3}.$$

(a) Behauptung: Das charakteristische Polynom von A zerfällt in Linearfaktoren.
Beweis: Wir bestimmen gleich die Smithsche Normalform der charakteristischen Ma-

trix $A - XI_3$ von A, da wir diese in der zweiten Teilaufgabe noch benötigen.

$$\begin{pmatrix} -X & 3 & 1 \\ 1 & -X & 0 \\ 0 & 2 & -X \end{pmatrix} \quad S_2 \quad \leftarrow \quad S_2 - 3S_3$$

$$\begin{pmatrix} -X & 0 & 1 \\ 1 & -X & 0 \\ 0 & 2+3X & -X \end{pmatrix} \quad Z_1 \quad \leftarrow \quad Z_1 + XZ_2$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -X^2 & 1 \\ 1 & -X & 0 \\ 0 & 2+3X & -X \end{pmatrix} \quad S_2 \quad \leftarrow \quad S_2 + XS_1$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -X^2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2+3X & -X \end{pmatrix} \quad Z_3 \quad \leftarrow \quad Z_3 + XZ_1$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -X^2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -X^3+3X+2 & 0 \end{pmatrix} \quad S_2 \quad \leftarrow \quad -S_2 - X^2S_3$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & X^3-3X-2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & X^3-3X-2 \end{pmatrix}$$

Somit ist das charakteristische Polynom von A

$$X^3 - 3X - 2 = (X-2)(X+1)^2.$$

(b) Aus der Zerlegung des charakteristischen Polynoms von A in Linearfaktoren erhält man die drei Normalformen folgendermaßen.

(i) Frobenius: Wir bentigen ein geeignetes Polynomtupel. An der Smithschen Normalform von $A - XI_3$ sieht man aber, dass das Minimalpolynom mit dem charakteristischen Polynom übereinstimmt. Also ist das einzige mögliche Polynomtupel $(X^3 - 3X - 2)$. Die Frobenius'sche Normalform von A ist damit die Begleitmatrix von $X^3 - 3X - 2$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(ii) Weierstraß: Ein zugehöriges Polynomtupel erhält man laut Vorlesung folgendermaßen aus den Polynomtupel zur Normalform von Frobenius: Man zerlegt jedes darin vorkommende Polynom in Potenzen von paarweise verschiedenen Primfaktoren und nimmt das Tupel, das aus diesen Potenzen besteht. In unserem Fall besteht das Frobenius–Tupel nur aus dem Polynonm $(X-2)(X+1)^2$. Ein Weierstraß–Tupel ist also $(X-2, (X+1)^2)$. Somit erhalten wir wegen $(X+1)^2 = X^2+2X+1$

als Weierstraß'sche Normalform von A:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

(iii) Jordan: Ein Weierstraß–Tupel ist $(X-2,(X+1)^2)$. Somit ist eine Jordan'sche Normalform von A:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Lösung 26.5:

Voraussetzung: Sei für $a, b \in \mathbb{R}$ die folgende Matrix gegeben.

$$A := \begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & 1 & 0 \\ b & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Wir bestimmen zunächst das charakteristische Polynom von A: $-(X-1)(X^2-aX-b^2)$. Die Nullstellen dieses Polynoms sind $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = \frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} + b^2}$ und $\lambda_3 = \frac{a}{2} - \sqrt{\frac{a^2}{4} + b^2}$. Dabei sind λ_2 und λ_3 genau dann gleich, wenn $a = b = 0$ gilt. In dem Fall sind sie also beide gleich 0. Das charakteristische Polynom hat somit die Gestalt $-(X-1)X^2$ oder $-(X-1)^2(X-\lambda)$ mit $\lambda \neq 1$ oder $-(X-1)(X-\lambda_2)(X-\lambda_3)$ mit $\lambda_2 \neq \lambda_3$ und $\lambda_2, \lambda_3 \neq 1$. Im letzten Fall kann man die Normalformen von Weierstraß und Jordan sofort angeben. Sie sind (bis auf Reihenfolge der Diagonaleinträge) identisch und sehen folgendermaßen aus:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

Im ersten Fall gilt $a = b = 0$. Wir bestimmen die Smithsche Normalform der charakteristischen Matrix von A:

$$\begin{pmatrix} -X & 0 & 0 \\ 0 & 1-X & 0 \\ 0 & 0 & -X \end{pmatrix} \quad Z_2 \leftarrow Z_2 - Z_3$$

$$\begin{pmatrix} X & 0 & 0 \\ 0 & 1-X & X \\ 0 & 0 & -X \end{pmatrix} \quad S_2 \leftarrow S_2 + S_3$$

$$\begin{pmatrix} X & 0 & 0 \\ 0 & 1 & X \\ 0 & -X & -X \end{pmatrix} \quad S_3 \leftarrow S_3 - XS_2$$

$$\begin{pmatrix} X & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -X & X^2-X \end{pmatrix} \quad Z_3 \leftarrow Z_3 + XZ_2$$

$$\begin{pmatrix} X & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & X^2 - X \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & X & 0 \\ 0 & 0 & X(X-1) \end{pmatrix}$$

Hier sind die beiden Normalformen wieder (bis auf Reihenfolge der Diagonaleinträge) identisch:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Betrachten wir nun den zweiten Fall. Die charakteristische Matrix von A ist äquivalent zu

$$\begin{pmatrix} X-1 & 0 & 0 \\ 0 & a-X & b \\ 0 & b & -X \end{pmatrix}.$$

Das charakteristische Polynom des zweiten Blocks ist hier $(X-1)(X-\lambda)$ mit $\lambda \neq 1$. Damit muß dies aber auch schon das Minimalpolynom sein. Der Block ist also äquivalent zu

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (X-1)(X-\lambda) \end{pmatrix}$$

Somit ist die Smithsche Normalform der gesamten Matrix:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & X-1 & 0 \\ 0 & 0 & (X-1)(X-\lambda) \end{pmatrix}.$$

Daraus ergibt sich, dass die Normalformen von Weierstraß und Jordan wieder (bis auf Reihenfolge der Diagonaleinträge) identisch sind, nämlich:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

In jedem Fall sind also die Weierstraß'sche und die Jordansche Normalform Diagonalmatrizen und (bis auf Reihenfolge der Diagonaleinträge) identisch.

Lösung 26.6:

Es sind alle möglichen Jordanschen Normalformen von Matrizen aus $\mathbb{R}^{8\times 8}$ zu bestimmen, die folgendes Minimalpolynom haben:

$$X^2(X-1)^3.$$

In der Weierstraß'schen Normalform werden die Elementarteiler der charakteristischen Matrix der gegebenen Matrix als Produkte von Potenzen von Primpolynomen dargestellt. Zerfällt das charakteristische Polynom in Linearfaktoren, so sind diese Primpolynome linear und jede dieser Potenzen liefert ein Jordankästchen. Da das Minimalpolynom stets der letzte Elementarteiler der charakteristischen Matrix ist, besteht die Jordansche Normalform einer Matrix mit obigem Minimalpolynom u.a. aus diesen beiden Jordankästchen:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Es sind also schon 5 Zeilen und Spalten festgelegt. Die restlichen 3 Zeilen und Spalten werden durch die übrigen Elementarteiler bestimmt. Davon gibt es (ohne das Minimalpolynom) maximal drei, die Grad ≥ 1 haben. Diese müssen mit dem Minimalpolynom eine Teilerkette bilden. Folgende Elementarteilertupel (ohne Einsen und Minimalpolynom) mit zugehörigen Jordankästchen sind also möglich:

$$(X-1, X-1, X-1): \quad (1),\ (1),\ (1);$$

$$(X, X(X-1)): \quad (0),\ (0),\ (1);$$

$$(X-1, X(X-1)): \quad (1),\ (0),\ (1);$$

$$(X-1, (X-1)^2): \quad (1),\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix};$$

$$(X^2(X-1)): \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ (1);$$

$$(X(X-1)^2): \quad (0),\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix};$$

$$((X-1)^3): \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$