

Nachklausur zur Linearen Algebra I und II (Modulklausur, Zwischenprüfung)

**Familienname:**

**Vorname:**

**Matrikelnummer:**

Übungsgruppenleiter in der Linearen Algebra I:

Übungsgruppenleiter in der Linearen Algebra II:

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	$\Sigma$
erreichte Punktzahl									
Korrektor (Initialen)									
Maximalpunktzahl	11	13	13	12	12	12	15	12	100

**Fassen Sie den Klausurbogen nicht an, bevor die Klausur eröffnet wird!**

Entfernen Sie nicht die Klammerung der Blätter. Sobald die Klausur eröffnet wird, tragen Sie auf **jeder Vorderseite sofort** Ihren Namen ein. Schreiben Sie die Lösung zu einer Aufgabe nur auf die dafür vorgesehenen Blätter. Wenn Sie sich nicht ganz sicher sind und noch genug Zeit ist, empfiehlt es sich, die Lösung zunächst auf Schmierpapier zu schreiben. Vergessen Sie aber nicht, die Lösung rechtzeitig auf den Klausurbogen zu übertragen. Soweit nichts anderes gesagt ist, gilt folgendes:

- Alle Antworten sind mathematisch zu begründen.
- Sofern nichts anderes gesagt ist, darf dabei auf mathematische Ergebnisse aus den Vorlesungen und den Übungen zur Linearen Algebra I (WS 2009/2010) und Linearen Algebra II (SS 2010) verwiesen werden (zum Beispiel durch ein Stichwort wie „Homomorphiesatz“ oder durch kurze Beschreibung des Ergebnisses).
- Sie können die einzelnen Teilaufgaben einer Aufgabe in einer anderen als der vorgeschlagenen Reihenfolge bearbeiten und in jeder Teilaufgabe die erzielten (Zwischen-)Ergebnisse aus den vorher bearbeiteten Teilaufgaben verwenden.
- Bei Manipulation von Matrizen sind die durchgeführten Spalten- oder Zeilenoperationen stets anzugeben (im Stile der Vorlesung oder ähnlich, also etwa  $Z_2 \leftrightarrow Z_4$  für Vertauschung der Zeilen 2 und 4 oder  $Z_1 \leftarrow Z_1 - 7Z_2$  für Subtrahieren des 7-fachen der Zeile 2 von der Zeile 1).

Haben Sie irgendwelche Fragen, so zögern Sie nicht, sich (möglichst lautlos) bemerkbar zu machen. Ein Mitarbeiter wird zu Ihnen an den Platz kommen.

**Die maximale Bearbeitungszeit beträgt 180 Minuten. Die einzigen erlaubten Hilfsmittel sind „Spickzettel“<sup>1</sup>, Schreibzeug, Schmierpapier<sup>2</sup> und eine Uhr<sup>3</sup>. Viel Erfolg!**

<sup>1</sup>ein beidseitig von eigener Hand beschriebenes Blatt im Format A4

<sup>2</sup>anfangs unbeschrieben

<sup>3</sup>ohne eingebaute Kommunikationsgeräte



---

Name:

Seite 1 zur Aufgabe 1

---

erreichte Punktzahl:

Korrektor (Initialen):

---

**Aufgabe 1 (11 Punkte).** Sei  $G$  eine abelsche Gruppe und eine Relation  $\sim$  auf  $G$  definiert durch

$$a \sim b : \iff ((a = b) \text{ oder } (a + b = 0)) \quad (a, b \in G).$$

- (a) Zeige, daß  $\sim$  eine Äquivalenzrelation auf der Menge  $G$  ist.
- (b) Bestimme explizit die zu  $\sim$  gehörige Zerlegung  $G/\sim$  von  $G$  für  $G = \mathbb{Z}/\langle 8 \rangle$ .
- (c) Zeige, daß  $\sim$  eine Kongruenzrelation auf der Gruppe  $G$  ist genau dann, wenn  $a + a = 0$  für alle  $a \in G$ .

**Lösung zur Aufgabe 1:**

**Fortsetzung der Lösung zur Aufgabe 1:**

---

**Name:**

**Seite 3 zur Aufgabe 1**

---

**Fortsetzung der Lösung zur Aufgabe 1:**

**Fortsetzung der Lösung zur Aufgabe 1:**

---

Name:

Seite 1 zur Aufgabe 2

---

erreichte Punktzahl:

Korrektor (Initialen):

---

**Aufgabe 2 (13 Punkte).** Sei  $K$  ein Körper. Betrachte die Basis

$$\underline{v} := (E_{11}, E_{21}, E_{12}, E_{22})$$

des  $K$ -Vektorraums  $K^{2 \times 2}$  mit

$$E_{11} := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{12} := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{21} := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad E_{22} := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Sei nun  $A \in K^{2 \times 2}$  und betrachte die lineare Abbildung

$$f: K^{2 \times 2} \rightarrow K^{2 \times 2}, \quad B \mapsto AB.$$

(a) Zeige, daß für die Darstellungsmatrix  $M(f, \underline{v})$  von  $f$  bezüglich  $\underline{v}$  gilt

$$M(f, \underline{v}) = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} \in K^{4 \times 4}.$$

(b) Zeige, daß  $f$  trigonalisierbar ist genau dann, wenn  $A$  trigonalisierbar ist.

(c) Zeige, daß  $f$  diagonalisierbar ist genau dann, wenn  $A$  diagonalisierbar ist.

**Lösung zur Aufgabe 2:**

**Fortsetzung der Lösung zur Aufgabe 2:**



**Name:**

**Seite 3 zur Aufgabe 2**

---

**Fortsetzung der Lösung zur Aufgabe 2:**

**Fortsetzung der Lösung zur Aufgabe 2:**

---

Name:

Seite 1 zur Aufgabe 3

---

erreichte Punktzahl:

Korrektor (Initialen):

---

**Aufgabe 3 (13 Punkte).** Es bezeichne  $V := \mathbb{R}[X]_2$  den  $\mathbb{R}$ -Vektorraum aller Polynome vom Grad  $\leq 2$  in der Unbestimmten  $X$  mit dem durch

$$\langle p, q \rangle := \int_0^1 p(x)q(x)dx \quad (p, q \in \mathbb{R}[X]_2)$$

gegebenen Skalarprodukt.

- (a) Betrachte den Untervektorraum  $U := \mathbb{R}[X]_1$  aller Polynome vom Grad  $\leq 1$  und finde  $v_2 \in \mathbb{R}[X]_1$  derart, daß  $(v_1, v_2)$  mit  $v_1 := 1$  eine Orthonormalbasis von  $U$  ist.
- (b) Berechne die orthogonale Projektion von  $X^2$  auf den Untervektorraum  $U$ .
- (c) Finde  $v_3 \in V$  derart, daß  $\underline{v} := (v_1, v_2, v_3)$  eine Orthonormalbasis von  $V$  ist.

**Lösung zur Aufgabe 3:**

**Fortsetzung der Lösung zur Aufgabe 3:**

**Name:**

**Seite 3 zur Aufgabe 3**

---

**Fortsetzung der Lösung zur Aufgabe 3:**

**Fortsetzung der Lösung zur Aufgabe 3:**

Name:

Seite 1 zur Aufgabe 4

erreichte Punktzahl:

Korrektor (Initialen):

**Aufgabe 4 (12 Punkte).** Betrachte die durch Mengeninklusion halbgeordnete Menge

$$A := \underbrace{\{\{1\}\}}_{=:a}, \underbrace{\{\{2\}\}}_{=:b}, \underbrace{\{\{1,2\}\}}_{=:c}, \underbrace{\{\{2,3\}\}}_{=:d} = \{a,b,c,d\}.$$

Für jede Teilmenge  $B$  von  $A$  bezeichne wie in der Vorlesung

- $\text{lb}(B)$  die Menge der unteren Schranken von  $B$  („lower bounds“),
- $\text{ub}(B)$  die Menge der oberen Schranken von  $B$  („upper bounds“),
- $\text{inf}(B)$  das Infimum (d.h. größte untere Schranke) von  $B$  (falls existent),
- $\text{min}(B)$  das Minimum (d.h. kleinste Element) von  $B$  (falls existent),
- $\text{sup}(B)$  das Supremum (d.h. kleinste obere Schranke) von  $B$  (falls existent) und
- $\text{max}(B)$  das Maximum (d.h. größte Element) von  $B$  (falls existent).

(a) Zeichne ein Hasse-Diagramm der halbgeordneten Menge  $A$ .

(b) Fertige eine Tabelle an, in deren ersten Spalte alle sechzehn Teilmengen  $B$  von  $A$  aufgeführt sind, und in deren Zeilen  $\text{lb}(B)$ ,  $\text{ub}(B)$ ,  $\text{inf}(B)$ ,  $\text{min}(B)$ ,  $\text{sup}(B)$ ,  $\text{max}(B)$  aufgeführt sind, wobei „—“ für Nichtexistenz steht. Die ersten zwei Zeilen der Tabelle sollen zum Beispiel wie folgt lauten:

$B$	$\text{lb}(B)$	$\text{ub}(B)$	$\text{inf}(B)$	$\text{min}(B)$	$\text{sup}(B)$	$\text{max}(B)$
$\emptyset$	$A$	$A$	—	—	—	—
$\{a\}$	$\{a\}$	$\{a,d\}$	$a$	$a$	$a$	$a$
$\vdots$	$\vdots$					$\vdots$

**Lösung zur Aufgabe 4:**

**Fortsetzung der Lösung zur Aufgabe 4:**



---

**Name:**

**Seite 3 zur Aufgabe 4**

---

**Fortsetzung der Lösung zur Aufgabe 4:**

**Fortsetzung der Lösung zur Aufgabe 4:**

---

Name:

Seite 1 zur Aufgabe 5

---

erreichte Punktzahl:

Korrektor (Initialen):

---

**Aufgabe 5 (12 Punkte).** Gegeben sei die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}.$$

- (a) Berechne eine invertierbare Matrix  $P \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  und eine Diagonalmatrix  $D \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  derart, daß  $A = P^T D P$ .
- (b) Bestimme die Sylvester-Signatur von  $A$ .

**Lösung zur Aufgabe 5:**

**Fortsetzung der Lösung zur Aufgabe 5:**

---

**Name:**

**Seite 3 zur Aufgabe 5**

---

**Fortsetzung der Lösung zur Aufgabe 5:**

**Fortsetzung der Lösung zur Aufgabe 5:**

---

**Name:****Seite 1 zur Aufgabe 6**

---

**erreichte Punktzahl:****Korrektor (Initialen):**

---

**Aufgabe 6 (12 Punkte).** Sei  $n \in \mathbb{N}_0$  und es seien  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$  normal, d.h.

$$A^T A = A A^T \quad \text{und} \quad B^T B = B B^T.$$

Ferner sei vorausgesetzt, daß  $A$  und  $B$  dasselbe charakteristische Polynom haben, d.h. es gelte  $\chi_A = \chi_B$ . Zeige, daß  $A$  und  $B$  ähnlich über  $\mathbb{R}$  sind, d.h. es gibt ein invertierbares  $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$  mit  $A = P B P^{-1}$ .

**Lösung zur Aufgabe 6:**

**Fortsetzung der Lösung zur Aufgabe 6:**



**Name:**

**Seite 3 zur Aufgabe 6**

---

**Fortsetzung der Lösung zur Aufgabe 6:**

**Fortsetzung der Lösung zur Aufgabe 6:**

Name:

Seite 1 zur Aufgabe 7

erreichte Punktzahl:

Korrektor (Initialen):

**Aufgabe 7 (15 Punkte).** Sei  $n \in \mathbb{N}$  und  $\omega := e^{\frac{2\pi i}{n}}$ .

(a) Zeige, daß im Polynomring  $\mathbb{C}[X]$  die Identität

$$X^n - 1 = \prod_{k=0}^{n-1} (X - \omega^k)$$

gilt.

(b) Bestimme das Tupel  $d(D - XI_n)$  der Determinantenteiler von  $D - XI_n$ , wobei  $D$  die Diagonalmatrix

$$D := \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \omega & & & \\ & & \omega^2 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \omega^{n-1} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{n \times n}$$

bezeichne.

(c) Bestimme das Tupel  $d(A - XI_n)$  der Determinantenteiler von  $A - XI_n$ , wobei  $A$  die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{n \times n}$$

bezeichne, die unterhalb der Diagonale und ganz rechts oben eine Eins stehen hat und sonst nur aus Nullen besteht.

(d) Sind  $A$  und  $D$  ähnlich, d.h.  $A \approx D$ ?

**Lösung zur Aufgabe 7:**

**Fortsetzung der Lösung zur Aufgabe 7:**

**Name:**

**Seite 3 zur Aufgabe 7**

---

**Fortsetzung der Lösung zur Aufgabe 7:**

**Fortsetzung der Lösung zur Aufgabe 7:**

---

**Name:****Seite 1 zur Aufgabe 8**

---

**erreichte Punktzahl:****Korrektor (Initialen):**

---

**Aufgabe 8 (12 Punkte).** Sei  $I$  das von  $X^4 - X^3 + X - 1$  erzeugte Ideal in  $\mathbb{Q}[X]$ .

- (a) Begründe, warum  $f: \mathbb{Q}[X]/I \rightarrow \mathbb{Q}[X]/I, \bar{p} \mapsto \overline{pX}$  linear und wohldefiniert ist.
- (b) Wähle eine Basis  $\underline{v}$  von des  $\mathbb{Q}$ -Vektorraums  $\mathbb{Q}[X]/I$  und bestimme die Frobenius'sche Normalform von  $A := M(f, \underline{v}) \in \mathbb{Q}^{4 \times 4}$ .
- (c) Bestimme die Weierstraß'sche Normalform von  $A$ .

**Lösung zur Aufgabe 8:**

**Fortsetzung der Lösung zur Aufgabe 8:**



---

**Name:**

**Seite 3 zur Aufgabe 8**

---

**Fortsetzung der Lösung zur Aufgabe 8:**

**Fortsetzung der Lösung zur Aufgabe 8:**