Markus Schweighofer

Nachklausur zur Linearen Algebra I und II (Modulklausur, Zwischenprüfung)

Familienname: Tao

Vorname: Terence

Matrikelnummer: 00171975

Übungsgruppenleiter in der Linearen Algebra I: Antoni Zygmund

Übungsgruppenleiter in der Linearen Algebra II: Elias Stein

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	$\sum$
erreichte Punktzahl	11	13	13	12	12	12	15	12	100
Korrektor (Initialen)	X.Y.	X.Y.	X.Y.	X.Y.	X.Y.	X.Y.	X.Y.	X.Y.	X.Y.
Maximalpunktzahl	11	13	13	12	12	12	15	12	100

Fassen Sie den Klausurbogen nicht an, bevor die Klausur eröffnet wird!

Entfernen Sie nicht die Klammerung der Blätter. Sobald die Klausur eröffnet wird, tragen Sie auf **jeder Vorderseite sofort** Ihren Namen ein. Schreiben Sie die Lösung zu einer Aufgabe nur auf die dafür vorgesehenen Blätter. Wenn Sie sich nicht ganz sicher sind und noch genug Zeit ist, empfiehlt es sich, die Lösung zunächst auf Schmierpapier zu schreiben. Vergessen Sie aber nicht, die Lösung rechtzeitig auf den Klausurbogen zu übertragen. Soweit nichts anderes gesagt ist, gilt folgendes:

- Alle Antworten sind mathematisch zu begründen.
- Sofern nichts anderes gesagt ist, darf dabei auf mathematische Ergebnisse aus den Vorlesungen und den Übungen zur Linearen Algebra I (WS 2009/2010) und Linearen Algebra II (SS 2010) verwiesen werden (zum Beispiel durch ein Stichwort wie „Homomorphiesatz“ oder durch kurze Beschreibung des Ergebnisses).
- Sie können die einzelnen Teilaufgaben einer Aufgabe in einer anderen als der vorgeschlagenen Reihenfolge bearbeiten und in jeder Teilaufgabe die erzielten (Zwischen-)Ergebnisse aus den vorher bearbeiteten Teilaufgaben verwenden.
- Bei Manipulation von Matrizen sind die durchgeführten Spalten- oder Zeilenoperationen stets anzugeben (im Stile der Vorlesung oder ähnlich, also etwa $Z_2 \leftrightarrow Z_4$ für Vertauschung der Zeilen 2 und 4 oder $Z_1 \leftarrow Z_1 - 7Z_2$ für Subtrahieren des 7-fachen der Zeile 2 von der Zeile 1).

Haben Sie irgendwelche Fragen, so zögern Sie nicht, sich (möglichst lautlos) bemerkbar zu machen. Ein Mitarbeiter wird zu Ihnen an den Platz kommen.

Die maximale Bearbeitungszeit beträgt 180 Minuten. Die einzigen erlaubten Hilfsmittel sind “Spickzettel”[1], Schreibzeug, Schmierpapier[2] und eine Uhr[3]. Viel Erfolg!

[1] ein beidseitig von eigener Hand beschriebenes Blatt im Format A4
[2] anfangs unbeschrieben
[3] ohne eingebaute Kommunikationsgeräte

Name: Terence Tao **Seite 1 zur Aufgabe 1**

erreichte Punktzahl: 11 **Korrektor (Initialen): X.Y.**

Aufgabe 1 (11 Punkte). Sei G eine abelsche Gruppe und eine Relation $\sim$ auf G definiert durch

$$a \sim b :\iff ((a = b) \text{ oder } (a + b = 0)) \qquad (a,b \in G).$$

(a) Zeige, daß $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf der Menge G ist.

(b) Bestimme explizit die zu $\sim$ gehörige Zerlegung $G/\sim$ von G für $G = \mathbb{Z}/\langle 8\rangle$.

(c) Zeige, daß $\sim$ eine Kongruenzrelation auf der Gruppe G ist genau dann, wenn $a + a = 0$ für alle $a \in G$.

Lösung zur Aufgabe 1: (a) Zu zeigen ist, daß $\sim$ reflexiv, symmetrisch und transitiv ist. Es ist trivial, daß $a \sim a$ für alle $a \in G$ gilt, d.h. $\sim$ reflexiv ist.

Um zu zeigen, daß $\sim$ symmetrisch ist, seien $a,b \in G$ mit $a \sim b$. Dann gilt $a = b$ oder $a + b = 0$, das heißt $b = a$ oder $b + a = 0$. Daher $b \sim a$ wie gewünscht.

Um schließlich zu zeigen, daß $\sim$ transitiv ist, seien $a,b,c \in G$ mit $a \sim b$ und $b \sim c$. Ist mindestens eine dieser beiden Relationen aufgrund von Gleichheit erfüllt (gilt also $a = b$ oder $b = c$), so folgt trivialerweise $a \sim c$. Wir können also voraussetzen, daß $a + b = 0$ und $b + c = 0$. Dann gilt aber $a = -b = c$ und daher $a \sim c$.

(b) Ist $G = \mathbb{Z}/\langle 8\rangle = \{\overline{0},\overline{1},\overline{2},\overline{3},\overline{4},\overline{5},\overline{6},\overline{7}\}$, so $G/\sim = \{\{\overline{0}\},\{\overline{1},\overline{7}\},\{\overline{2},\overline{6}\},\{\overline{3},\overline{5}\},\{\overline{4}\}\}$.

(c) Gilt $a + a = 0$ für alle $a \in G$, so gilt $a = -a$ für alle $a \in G$ und daher

$$a \sim b \iff ((a = b) \text{ oder } (b = -a)) \iff (a = b) \text{ oder } (b = a)) \iff a = b$$

für alle $a,b \in G$, das heißt $\sim$ ist die Gleichheitsrelation auf G, welche trivialerweise eine Kongruenzrelation auf G ist.

Sei umgekehrt $\sim$ eine Kongruenzrelation auf G. Dann gilt

$$a \sim b \iff a - b \sim 0 \iff ((a - b = 0) \text{ oder } ((a - b) + 0 = 0)) \iff a - b = 0 \iff a = b$$

für alle $a,b \in G$. Aus $a \sim -a$ folgt dann $a = -a$ und daher $a + a = 0$ für alle $a \in G$.

Name: Terence Tao **Seite 1 zur Aufgabe 2**

erreichte Punktzahl: 13 **Korrektor (Initialen): X.Y.**

Aufgabe 2 (13 Punkte). Sei K ein Körper. Betrachte die Basis

$$\underline{v} := (E_{11}, E_{21}, E_{12}, E_{22})$$

des K-Vektorraums $K^{2\times 2}$ mit

$$E_{11} := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad E_{12} := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad E_{21} := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad E_{22} := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Sei nun $A \in K^{2\times 2}$ und betrachte die lineare Abbildung

$$f\colon K^{2\times 2} \to K^{2\times 2},\ B \mapsto AB.$$

(a) Zeige, daß für die Darstellungsmatrix $M(f,\underline{v})$ von f bezüglich $\underline{v}$ gilt

$$M(f,\underline{v}) = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} \in K^{4\times 4}.$$

(b) Zeige, daß f trigonalisierbar ist genau dann, wenn A trigonalisierbar ist.

(c) Zeige, daß f diagonalisierbar ist genau dann, wenn A diagonalisierbar ist.

Lösung zur Aufgabe 2: (a) Schreibt man $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, so gilt

$$\begin{aligned}
f(E_{11}) = AE_{11} &= \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ a_{21} & 0 \end{pmatrix} = a_{11}E_{11} + a_{21}E_{21} + 0E_{12} + 0E_{22}, \\
f(E_{21}) = AE_{21} &= \begin{pmatrix} a_{12} & 0 \\ a_{22} & 0 \end{pmatrix} = a_{12}E_{11} + a_{22}E_{21} + 0E_{12} + 0E_{22}, \\
f(E_{12}) = AE_{12} &= \begin{pmatrix} 0 & a_{11} \\ 0 & a_{21} \end{pmatrix} = 0E_{11} + 0E_{21} + a_{11}E_{12} + a_{21}E_{22} \quad \text{und} \\
f(E_{22}) = AE_{22} &= \begin{pmatrix} 0 & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix} = 0E_{11} + 0E_{21} + a_{12}E_{12} + a_{22}E_{22}.
\end{aligned}$$

Somit

$$\operatorname{coord}_{\underline{v}}(f(E_{11})) = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \operatorname{coord}_{\underline{v}}(f(E_{21})) = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\operatorname{coord}_{\underline{v}}(f(E_{12})) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix}, \operatorname{coord}_{\underline{v}}(f(E_{22})) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix},$$

und daher

$$M(f,\underline{v}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{11} & a_{12} \\ 0 & 0 & a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}.$$

(b) Es gilt

$$\begin{aligned}
\chi_f = \chi_{M(f,\underline{v})} = \det(M(f,\underline{v}) - XI_4) &\overset{(a)}{=} \det \begin{pmatrix} A - XI_2 & 0 \\ 0 & A - XI_2 \end{pmatrix} \\
&= \det(A - XI_2)\det(A - XI_2) = (\chi_A)^2.
\end{aligned}$$

Zerfällt χ_A in $K[X]$ in Linearfaktoren, so auch $\chi_f = (\chi_A)^2$. Zerfällt umgekehrt χ_f in $K[X]$ in Linearfaktoren, so muß auch χ_A in $K[X]$ zerfallen, da sonst χ_f einen Primfaktor vom Grad ≥ 2 hätte (hier benutzen wir, daß $K[X]$ ein faktorieller Ring ist).

Fortsetzung der Lösung zur Aufgabe 2: Daher gilt

$$\begin{aligned} f \text{ trigonalisierbar} &\iff \chi_f \text{ zerfällt} \\ &\iff \chi_A \text{ zerfällt} \\ &\iff A \text{ trigonalisierbar.} \end{aligned}$$

(c) f ist nach Vorlesung diagonalisierbar genau dann, wenn χ_f zerfällt und für jeden Eigenwert von f die algebraische und geometrische Vielfachheit übereinstimmt. Analoges gilt für A. Nun haben wir in (b) bereits gesehen, daß χ_f zerfällt genau dann, wenn χ_A zerfällt. Wegen $\chi_f = (\chi_A)^2$ sind außerdem die Eigenwerte von A und f dieselben, wobei die algebraische Vielfachheit bezüglich f jeweils doppelt so groß ist wie bezüglich A. Es reicht daher zu zeigen, daß auch die geometrische Vielfachheit bezüglich f jeweils doppelt so groß ist wie bezüglich A. Sei hierzu $\lambda \in K$. Wir zeigen

$$\dim(\ker(f - \lambda \mathrm{id})) = 2 \dim(\ker(A - \lambda I_2)).$$

Dies folgt aus

$$\begin{aligned} \ker(f - \lambda \mathrm{id}) &= \left\{ \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \mid (A - \lambda I_2) \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = 0 \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \mid (A - \lambda I_2) \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \end{pmatrix} = 0,\ (A - \lambda I_2) \begin{pmatrix} b_{12} \\ b_{22} \end{pmatrix} = 0 \right\} \\ &\cong \left\{ \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \end{pmatrix} \mid (A - \lambda I_2) \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \end{pmatrix} = 0 \right\} \times \left\{ \begin{pmatrix} b_{12} \\ b_{22} \end{pmatrix} \mid (A - \lambda I_2) \begin{pmatrix} b_{12} \\ b_{22} \end{pmatrix} = 0 \right\} \\ &= (\ker(A - \lambda I_2)) \times (\ker(A - \lambda I_2)). \end{aligned}$$

Name: Terence Tao **Seite 1 zur Aufgabe 3**

erreichte Punktzahl: 13 **Korrektor (Initialen): X.Y.**

Aufgabe 3 (13 Punkte). Es bezeichne $V := \mathbb{R}[X]_2$ den $\mathbb{R}$-Vektorraum aller Polynome vom Grad ≤ 2 in der Unbestimmten X mit dem durch

$$\langle p,q\rangle := \int_0^1 p(x)q(x)dx \qquad (p,q \in \mathbb{R}[X]_2)$$

gegebenen Skalarprodukt.

(a) Betrachte den Untervektorraum $U := \mathbb{R}[X]_1$ aller Polynome vom Grad ≤ 1 und finde $v_2 \in \mathbb{R}[X]_1$ derart, daß (v_1,v_2) mit $v_1 := 1$ eine Orthonormalbasis von U ist.

(b) Berechne die orthogonale Projektion von X^2 auf den Untervektorraum U.

(c) Finde $v_3 \in V$ derart, daß $\underline{v} := (v_1,v_2,v_3)$ eine Orthonormalbasis von V ist.

Lösung zur Aufgabe 3: (a) Man sieht sofort, daß $X - \frac{1}{2}$ senkrecht auf 1 steht. Daher ist

$$v_2 := \frac{X-\frac{1}{2}}{\|X-\frac{1}{2}\|} = \frac{X-\frac{1}{2}}{\sqrt{\int_0^1 (x-\frac{1}{2})^2 dx}} = \frac{X-\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}}} = \sqrt{3}(2X-1)$$

ein Vektor mit $\|v_2\| = 1$, der senkrecht auf $v_1 = 1$ steht. Da außerdem $\|v_1\| = 1$, ist (v_1,v_2) ein Orthonormalsystem und wegen $\dim U = 2$ eine Orthonormalbasis von U.

(b) Da (v_1,v_2) eine Orthonormalbasis von U ist, ist die gesuchte orthogonale Projektion

$$w := \langle v_1,X^2\rangle v_1 + \langle v_2,X^2\rangle v_2 = \frac{1}{3}v_1 + \sqrt{3}(\frac{2}{3}-\frac{1}{2})v_2 = \frac{1}{3} + \frac{\sqrt{3}}{6}\sqrt{3}(2X-1) = \frac{1}{3} + X - \frac{1}{2} = X - \frac{1}{6}.$$

(c) Nach Gram-Schmidt und (b) kann man

$$v_3 := \frac{X^2-w}{\|X^2-w\|}$$

nehmen. Es gilt $X^2 - w = X^2 - X + \frac{1}{6}$ und daher

$$\begin{aligned}\|X^2-w\|^2 = \int_0^1 (x^2-x+\frac{1}{6})^2 dx &= \int_0^1 (x^4 - 2x^3 + \frac{2}{6}x^2 + x^2 - \frac{2}{6}x + \frac{1}{36})dx \\ &= \frac{1}{5} - \frac{2}{4} + \frac{4}{9} - \frac{2}{12} + \frac{1}{36} = \frac{1}{180},\end{aligned}$$

also $\|X^2 - w\| = \frac{1}{6\sqrt{5}}$ und $v_3 = 6\sqrt{5}(X^2 - X + \frac{1}{6}) = \sqrt{5}(6X^2 - 6X + 1)$.

Name: Terence Tao **Seite 1 zur Aufgabe 4**

erreichte Punktzahl: 12 **Korrektor (Initialen): X.Y.**

Aufgabe 4 (12 Punkte). Betrachte die durch Mengeninklusion halbgeordnete Menge

$$A := \{\underbrace{\{1\}}_{=:a}, \underbrace{\{2\}}_{=:b}, \underbrace{\{1,2\}}_{=:c}, \underbrace{\{2,3\}}_{=:d}\} = \{a,b,c,d\}.$$

Für jede Teilmenge B von A bezeichne wie in der Vorlesung

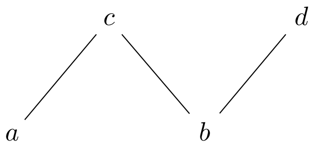
- $\mathrm{lb}(B)$ die Menge der unteren Schranken von B („lower bounds“),
- $\mathrm{ub}(B)$ die Menge der oberen Schranken von B („upper bounds“),
- $\inf(B)$ das Infimum (d.h. größte untere Schranke) von B (falls existent),
- $\min(B)$ das Minimum (d.h. kleinste Element) von B (falls existent),
- $\sup(B)$ das Supremum (d.h. kleinste obere Schranke) von B (falls existent) und
- $\max(B)$ das Maximum (d.h. größte Element) von B (falls existent).

(a) Zeichne ein Hasse-Diagramm der halbgeordneten Menge A.

(b) Fertige eine Tabelle an, in deren ersten Spalte alle sechzehn Teilmengen B von A aufgeführt sind, und in deren Zeilen $\mathrm{lb}(B)$, $\mathrm{ub}(B)$, $\inf(B)$, $\min(B)$, $\sup(B)$, $\max(B)$ aufgeführt sind, wobei „—“ für Nichtexistenz steht. Die ersten zwei Zeilen der Tabelle sollen zum Beispiel wie folgt lauten:

B	$\mathrm{lb}(B)$	$\mathrm{ub}(B)$	$\inf(B)$	$\min(B)$	$\sup(B)$	$\max(B)$
$\emptyset$	A	A	—	—	—	—
$\{a\}$	$\{a\}$	$\{a,c\}$	a	a	a	a
$\vdots$	$\vdots$					$\vdots$

Lösung zur Aufgabe 4: (a)



(b)

B	$\mathrm{lb}(B)$	$\mathrm{ub}(B)$	$\inf(B)$	$\min(B)$	$\sup(B)$	$\max(B)$
$\emptyset$	A	A	—	—	—	—
$\{a\}$	$\{a\}$	$\{a,c\}$	a	a	a	a
$\{b\}$	$\{b\}$	$\{b,c,d\}$	b	b	b	b
$\{c\}$	$\{a,b,c\}$	$\{c\}$	c	c	c	c
$\{d\}$	$\{b,d\}$	$\{d\}$	d	d	d	d
$\{a,b\}$	$\emptyset$	$\{c\}$	—	—	c	—
$\{a,c\}$	$\{a\}$	$\{c\}$	a	a	c	c
$\{a,d\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	—	—	—	—
$\{b,c\}$	$\{b\}$	$\{c\}$	b	b	c	c
$\{b,d\}$	$\{b\}$	$\{d\}$	b	b	d	d
$\{c,d\}$	$\{b\}$	$\emptyset$	b	—	—	—
$\{a,b,c\}$	$\emptyset$	$\{c\}$	—	—	c	c
$\{a,c,d\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	—	—	—	—
$\{a,b,d\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	—	—	—	—
$\{a,b,c\}$	$\emptyset$	$\{c\}$	—	—	c	c
$\{a,b,c,d\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	—	—	—	—

Name: Terence Tao **Seite 1 zur Aufgabe 5**

erreichte Punktzahl: 12 **Korrektor (Initialen): X.Y.**

Aufgabe 5 (12 Punkte). Gegeben sei die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

(a) Berechne eine invertierbare Matrix $P \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ und eine Diagonalmatrix $D \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ derart, daß $A = P^T DP$.

(b) Bestimme die Sylvester-Signatur von A.

Lösung zur Aufgabe 5: (a) Wir benutzen folgenden Satz aus §13.5 der Vorlesung: Sei K ein Körper mit $2 \neq 0$ in K. Sei V ein K-Vektorraum mit Basis $\underline{v} = (v_1, \dots, v_n)$ und q eine quadratische Form auf V. Seien $\ell_1, \dots, \ell_n$ Linearformen auf V und $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$. Dann sind äquivalent:

(i) $\ell_1, \dots, \ell_n$ sind linear unabhängig im algebraischen Dualraum von V und

$$q(v) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_k \ell_k(v)^2 \qquad \text{für alle } v \in V.$$

(ii) $P := (\ell_i(v_j))_{1\leq i,j\leq n} \in K^{n\times n}$ ist invertierbar und $M(q,\underline{v}) = P^T DP$, wobei D die Diagonalmatrix mit Diagonaleinträgen $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ ist.

In unserer Anwendung ist $K := \mathbb{R}$, $V := \mathbb{R}^3$, $\underline{v} := \underline{e}$ die Standardbasis von $\mathbb{R}^3$, $n = 3$,

$$q(x) = 3x_1^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 - x_2^2 + 4x_2x_3 - x_3^2 \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^3$$

(also $M(q,\underline{v}) = A$) und wir suchen also linear unabhängige $\ell_1,\ell_2,\ell_3 \in V^*$ sowie $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3 \in \mathbb{R}$ mit $q(x) = \lambda_1\ell_1(x)^2 + \lambda_2\ell_2(x)^2 + \lambda_3\ell_3(x)^2$ für alle $x \in \mathbb{R}^3$, um Bedingung (i) zu erfüllen. Aus der Vorlesung wissen wir, wie man diese Daten findet, als wir uns in §13.5 überlegt haben, wie man eine verallgemeinerte Cholesky-Zerlegung findet (was genau das ist, was zu tun ist, wobei man hofft, dass man keine Permutationsmatrix braucht). Es handelt sich um folgende Tricks der „quadratischen Ergänzung“:

$$\begin{aligned}
q(x) &= \underbrace{3}_{\lambda_1}\underbrace{(x_1 + \frac{1}{3}x_2 + \frac{2}{3}x_3)}_{\ell_1(x_1,x_2,x_3)}{}^2 \underbrace{-3(\frac{1}{3}x_2 + \frac{2}{3}x_3)^2 - x_2^2 + 4x_2x_3 - x_3^2}_{q_1(x_2,x_3)} \\
q_1(x) &= -\frac{4}{3}x_2^2 + \frac{8}{3}x_2x_3 - \frac{7}{3}x_3^2 \\
&= \underbrace{-\frac{4}{3}}_{\lambda_2}\underbrace{(x_2 - x_3)}_{\ell_2(x_2,x_3)}{}^2 + \underbrace{\frac{4}{3}(-x_3)^2 - \frac{7}{3}x_3^2}_{q_2(x_3)} \\
q_2(x) &= \underbrace{-1}_{\lambda_3}(\underbrace{x_3}_{\ell_3(x_3)})^2.
\end{aligned}$$

Aus (ii) erhalten wir nun mit

$$P := \begin{pmatrix} \ell_1(e_1) & \ell_1(e_2) & \ell_1(e_3) \\ \ell_2(e_1) & \ell_2(e_2) & \ell_2(e_3) \\ \ell_3(e_1) & \ell_3(e_2) & \ell_3(e_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad D := \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{4}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

dass $A = P^T DP$.

(b) Nach §14.1 der Vorlesung ist die Sylvester-Signatur von $A = M(q,\underline{v})$ gleich der Sylvester-Signatur von q und letztere ergibt sich durch Zählen der positiven und negativen Diagonaleinträge von D. Da D einen positive und zwei negative Diagonaleinträge hat, ist die Sylvester-Signatur von A gleich (1,2).

Name: Terence Tao **Seite 1 zur Aufgabe 6**

erreichte Punktzahl: 12 **Korrektor (Initialen): X.Y.**

Aufgabe 6 (12 Punkte). Sei $n \in \mathbb{N}_0$ und es seien $A,B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ normal, d.h.

$$A^TA = AA^T \qquad \text{und} \qquad B^TB = BB^T.$$

Ferner sei vorausgesetzt, daß A und B dasselbe charakteristische Polynom haben, d.h. es gelte $\chi_A = \chi_B$. Zeige, daß A und B ähnlich über $\mathbb{R}$ sind, d.h. es gibt ein invertierbares $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit $A = PBP^{-1}$.

Lösung zur Aufgabe 6: A und B sind auch als komplexe Matrizen natürlich normal und daher nach Vorlesung über $\mathbb{C}$ diagonalisierbar, das heißt, es gibt Diagonalmatrizen $D_A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ und $D_B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ mit $A \approx D_A$ und $B \approx D_B$ über $\mathbb{C}$. Da ähnliche Matrizen dasselbe charakteristische Polynom haben, gilt $\chi_{D_A} = \chi_A = \chi_B = \chi_{D_B}$. Ist $(a_1,\dots,a_n) \in \mathbb{C}^n$ die Diagonale von A und $(b_1,\dots,b_n) \in \mathbb{C}^n$ die Diagonale von B, so folgt

$$\prod_{i=1}^n (a_i - X) = \chi_{D_A} = \chi_{D_B} = \prod_{i=1}^n (b_i - X),$$

weshalb A und B bis auf Reihenfolge der Diagonaleinträge dieselben Diagonalmatrizen sind. Dann sind aber natürlich D_A und D_B ähnlich (mit einer Übergangsmatrix, die eine Permutationsmatrix ist). Es folgt $A \approx D_A \approx D_B \approx B$ über $\mathbb{C}$. Am Ende von §17.4 der Vorlesung hatten wir aber das nichttriviale Ergebnis bewiesen, daß Ähnlichkeit von zwei Matrizen über einem Körper schon durch Ähnlichkeit derselben Matrizen über einem Oberkörper impliziert wird. Wegen $A,B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ folgt also aus $A \approx B$ über $\mathbb{C}$ sogar $A \approx B$ über $\mathbb{R}$.

Name: Terence Tao **Seite 1 zur Aufgabe 7**

erreichte Punktzahl: 15 **Korrektor (Initialen): X.Y.**

Aufgabe 7 (15 Punkte). Sei $n \in \mathbb{N}$ und $\omega := e^{\frac{2\pi i}{n}}$.

(a) Zeige, daß im Polynomring $\mathbb{C}[X]$ die Identität

$$X^n - 1 = \prod_{k=0}^{n-1}(X - \omega^k)$$

gilt.

(b) Bestimme das Tupel $d(D - XI_n)$ der Determinantenteiler von $D - XI_n$, wobei D die Diagonalmatrix

$$D := \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \omega & & & \\ & & \omega^2 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \omega^{n-1} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{n\times n}$$

bezeichne.

(c) Bestimme das Tupel $d(A - XI_n)$ der Determinantenteiler von $A - XI_n$, wobei A die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{n\times n}$$

bezeichne, die unterhalb der Diagonale und ganz rechts oben eine Eins stehen hat und sonst nur aus Nullen besteht.

(d) Sind A und D ähnlich, d.h. $A \approx D$?

Lösung zur Aufgabe 7: (a) Die Elemente ω^k ($k \in \{0, \dots, n-1\}$) sind paarweise verschieden und Nullstellen von $X^n - 1$, denn $(\omega^k)^n = \omega^{kn} = (\omega^n)^k = 1^k = 1$. Damit haben die beiden fraglichen normierten Polynome vom Grad n dieselben n verschiedenen Nullstellen und sind daher natürlich gleich (die Differenz ist ein Polynom vom Grad $\leq n-1$ mit n verschiedenen Nullstellen, also das Nullpolynom).

(b) Für jedes $i \in \{0, \dots, n-1\}$ ist der $(n-1)$-te Determinantenteiler $d_{n-1}(D - XI_n)$ ein Teiler des $(n-1)$-Minors $\prod_{k=0, k\neq i}^{n-1}(\omega^k - X)$. Daraus folgt aber $d_{n-1}(D - XI_n) = 1$ und daher sogar $d_i(D - XI_n) = 1$ für alle $i \in \{1, \dots, n-1\}$. Weiter ist $d_n(D - XI_n)$ die normierte Determinante von $D - XI_n$, also $d_n(D - XI_n) = \prod_{k=0}^{n-1}(X - \omega^k) \overset{(a)}{=} X^n - 1$. Insgesamt

$$d(D - XI_n) = (1, \dots, 1, X^n - 1).$$

(c) Die $(n-1)\times(n-1)$-Matrix, die man aus $A - XI_n$ durch Streichen der ersten Zeile und ersten Spalte gewinnt, ist eine obere Dreiecksmatrix mit lauter Einsen auf der Diagonale. Daher ist 1 ein $(n-1)$-Minor von $A - XI_n$, also der $(n-1)$-te und damit auch alle vorherigen Determinantenteiler von $A - XI_n$ gleich 1. Die Determinante von $A - XI_n$ ergibt durch Entwicklung nach der ersten Zeile $(-X)(-X)^{n-1} + (-1)^{n-1} = (-1)^{n-1}(1 - X^n)$, woraus $d_n(A - XI_n) = X^n - 1$ folgt, also wieder

$$d(A - XI_n) = (1, \dots, 1, X^n - 1).$$

(d) Laut Vorlesung gilt $A \approx D \iff d(A - XI_n) = d(D - XI_n)$, womit nach (b) und (c) die Frage positiv beantwortet ist.

Name: Terence Tao **Seite 1 zur Aufgabe 8**

erreichte Punktzahl: 12 **Korrektor (Initialen): X.Y.**

Aufgabe 8 (12 Punkte). Sei I das von $X^4 - X^3 + X - 1$ erzeugte Ideal in $\mathbb{Q}[X]$.

(a) Begründe, warum $f\colon \mathbb{Q}[X]/I \to \mathbb{Q}[X]/I$, $\overline{p} \mapsto \overline{pX}$ linear und wohldefiniert ist.

(b) Wähle eine Basis $\underline{v}$ von des $\mathbb{Q}$-Vektorraums $\mathbb{Q}[X]/I$ und bestimme die Frobenius'sche Normalform von $A := M(f,\underline{v}) \in \mathbb{Q}^{4\times 4}$.

(c) Bestimme die Weierstraß'sche Normalform von A.

Lösung zur Aufgabe 8: (a) Offensichtlich ist $\mathbb{Q}[X] \to \mathbb{Q}[X]$, $p \mapsto pX$ ein Q-Vektorraumhomomorphismus. Schaltet man die kanonische Surjektion $\mathbb{Q}[X] \to \mathbb{Q}[X]/I$ dahinter, so erhält man den $\mathbb{Q}$-Vektorraumhomomorphismus $\mathbb{Q}[X] \to \mathbb{Q}[X]/I$, $p \mapsto \overline{pX}$. Da I ein Ideal ist, liegt I in dessen Kern (denn ist $p \in I$, so $pX \in I$). Nach dem Homomorphiesatz für Vektorräume erhält man daher den $\mathbb{Q}$-Vektorraumendomorphismus f.

(b) Wir wählen $\underline{v} := (\overline{1},\overline{X},\overline{X^2},\overline{X^3})$. In der ersten Bemerkung von §17.5 wurde dann gezeigt, daß $M(f,\underline{v})$ gerade die Begleitmatrix $C(p)$ des Polynoms $p := X^4 - X^3 + X - 1 \in \mathbb{Q}[X]$ ist (dies kann man sich aber auch noch einmal überlegen). Nach Definition der Frobenius'schen Normalform ist aber eine Begleitmatrix schon in Frobenius'scher Normalform. Explizit lautet also die Frobenius'sche Normalform von A:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(c) Um die Weierstraß'sche Normalform zu bekommen, müssen wir nach (b) nur noch p in Primfaktoren zerlegen. Offensichtlich ist 1 eine Nullstelle von p, weshalb wir $X - 1$ abspalten können: $X^4 - X^3 + X - 1 = (X-1)(X^3+1)$. Nun ist -1 eine Nullstelle von $X^3 - 1$ und $X^3 - 1 = (X+1)(X^2 - X - 1)$. Da $X^2 - X - 1$ keine rationale Nullstelle hat, ist die Primfaktorzerlegung von p in $\mathbb{Q}[X]$

$$p = (X-1)(X+1)(X^2 - X - 1)$$

und die Weierstraß'sche Normalform von p ist die Blockdiagonalmatrix mit den den drei Begleitmatrizen $C(X-1) = (1) \in \mathbb{Q}^{1\times 1}$, $C(X+1) = (-1) \in \mathbb{Q}^{1\times 1}$ und $C(X^2 - X - 1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ als Diagonalblöcke. Explizit lautet also die Weierstraß'sche Normalform von A:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$