
Übungsblatt 2 zur Algorithmischen Algebraischen Geometrie

Aufgabe 1.

Zeige, dass jeder algebraisch abgeschlossene Körper unendlich ist.

Aufgabe 2.

Sei K ein unendlicher Körper und $f \in K[X_1, \dots, X_n]$ mit $f(x) = 0$ für alle $x \in K^n$.

Zeige, dass $f = 0$ gilt, d.h. dass f das Nullpolynom ist.

Gilt diese Aussage auch für endliche Körper?

Aufgabe 3.

Sei A ein Integritätsring.

Zeige, dass A genau dann ein Körper ist, wenn jedes Ideal I von A ein Radikalideal ist.

Aufgabe 4.

Sei K ein vollkommener Körper und $C \supseteq K$ ein algebraisch abgeschlossener Oberkörper von K . Weiter sei $f \in K[X] \setminus \{0\}$.

Zeige, dass das von f erzeugte Ideal (f) genau dann ein Radikalideal ist, wenn f in C nur einfache Nullstellen hat.

Überlege dir ein Gegenbeispiel für den Fall, dass K nicht vollkommen ist.

Definition:

Sei X eine Menge. Eine Topologie \mathcal{O} auf X ist eine Menge von Teilmengen von X , deren Mitglieder die *offenen Mengen* genannt werden und für die folgendes gilt:

(a) $\emptyset, X \in \mathcal{O}$

(b) für $U, V \in \mathcal{O}$ gilt $U \cap V \in \mathcal{O}$

(c) für $M \subseteq \mathcal{O}$ gilt $\bigcup M \in \mathcal{O}$

Ein *topologischer Raum* ist ein Paar (X, \mathcal{O}) aus einer Menge X und einer Topologie \mathcal{O} auf X . In der Regel lässt man \mathcal{O} in der Notation weg.

Ein topologischer Raum X heißt *zusammenhängend*, wenn X nicht die Vereinigung zweier nicht-leerer, disjunkter offener Mengen ist.

Er heißt *irreduzibel*, wenn je zwei nichtleere offene Mengen sich schneiden.

Aufgabe 5.

Zeige, dass jeder irreduzible topologische Raum zusammenhängend ist, und finde ein Beispiel für einen nichtleeren zusammenhängenden topologischen Raum, der nicht irreduzibel ist.

Abgabe bis Montag, den 31. Oktober 2011, 10:14 Uhr in die Zettelkästen neben F411.