**Universität Konstanz** Sebastian Gruler
**Fachbereich Mathematik und Statistik** Christoph Hanselka
**Wintersemester 2011/2012** Markus Schweighofer

---

Übungsblatt 6 zur Algorithmischen Algebraischen Geometrie

---

**Aufgabe 1.**
Sei $R$ ein kommutativer Ring und $M$ und $N$ $R$-Moduln. Zeige:

a) Ist $M$ erzeugt von $X \subseteq M$ und $N$ von $Y \subseteq N$, so ist $M \otimes_R N$ von $\{ x \otimes y \mid x \in X, y \in Y \}$ erzeugt.

b) Ist $X$ Basis von $M$ und $Y$ Basis von $N$, so ist $\{ x \otimes y \mid x \in X, y \in Y \}$ Basis von $M \otimes_R N$.

c) Sind $A$ und $B$ affine $K$-Algebren, so ist auch $A \otimes_K B$ affin.

**Aufgabe 2.**
Sei $A$ ein kommutativer Ring. $A$ heißt *reduziert*, falls $\operatorname{Nil}(A) = (0)$.
Setze $A_{\text{red}} := A/\operatorname{Nil}(A)$.

a) Zeige dass $A_{\text{red}}$ reduziert ist.

b) Seien $A$ und $B$ reduzierte affine $K$-Algebren. Zeige, dass $((A \otimes_K B)_{\text{red}}, \iota_A, \iota_B)$ bei kanonischer Wahl von $\iota_A$ und $\iota_B$ als reduzierte affine $K$-Algebra die durch folgendes Diagramm dargestellte universelle Eigenschaft erfüllt:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[dr, "\iota_A"'] \arrow[drr, bend left, "\forall\alpha"] & & \\
& (A \otimes B)_{\text{red}} \arrow[r, dotted, "\exists!\gamma"] & D \\
B \arrow[ur, "\iota_B"] \arrow[urr, bend right, "\forall\beta"'] & &
\end{tikzcd}$$

In Worten: Für alle reduzierten affinen $K$-Algebren $D$ und Algebrenhomomorphismen $\alpha$ und $\beta$ wie im Diagramm, existiert genau ein Algebrenhomomorphismus $\gamma$, für welchen $\alpha = \gamma \circ \iota_A$ und $\beta = \gamma \circ \iota_B$ gilt.

c) Zeige, dass für alle affinen $K$-Varietäten gilt:

$$K[V \times W] \cong (K[V] \otimes_K K[W])_{\text{red}}$$

**Aufgabe 3.**
Sei $\varphi : V \to W$ ein Morphismus affiner $K$-Varietäten und $\varphi^* : K[W] \to K[V]$ der dazu duale Homomorphismus. Zeige oder widerlege durch Gegenbeispiel:

a) $\varphi$ injektiv $\Rightarrow \varphi^*$ surjektiv

b) $\varphi$ surjektiv $\Rightarrow \varphi^*$ injektiv

c) $\varphi^*$ injektiv $\Rightarrow \varphi$ surjektiv

d) $\varphi^*$ surjektiv $\Rightarrow \varphi$ injektiv

**Abgabe bis Montag, den 28. November 2011, 10:14 Uhr in die Zettelkästen neben F411.**