Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Wintersemester 2011/2012

Sebastian Gruler
Christoph Hanselka
Markus Schweighofer

Übungsblatt 7 zur Algorithmischen Algebraischen Geometrie

Aufgabe 1.
Seien R ein kommutativer Ring und M und N R-Moduln. Zeige:

a) (Skalarerweiterung) Ist S eine R-Algebra, so läßt sich $S \otimes_R M$ auf genau eine Weise zu einem S-Modul machen derart, daß $s(x \otimes y) = (sx) \otimes y$ für alle $s, x \in S$ und $y \in M$ gilt.

b) $R \otimes_R M \cong M$

c) Zu je zwei Homomorphismen $\varphi\colon M \to M'$ und $\psi\colon N \to N'$ in weitere R-Moduln M' und N' gibt es genau einen Homomorphismus $(\psi \otimes \psi) : M \otimes N \to M' \otimes N'$ mit $(\varphi \otimes \psi)(x \otimes y) = \varphi(x) \otimes \psi(y)$ für alle $x \in M$ und $y \in N$.

d) $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^n \cong \mathbb{C}^n$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$

Aufgabe 2.
Seien $K \subseteq L \subseteq C$ Körper und C algebraisch abgeschlossen und sei $V = V_C(I)$ eine affine K-Varietät. Fasse nun V als affine L-Varietät auf und betrachte ihren Koordinatenring $L[V]$. Zeige:

a) $L[V] \cong (L \otimes_K K[V])_{\mathrm{red}}$ als L-Algebra vermöge Skalarerweiterung

b) $L \otimes_K K[V]$ ist im Allgemeinen nicht reduziert.
(Hinweis: Betrachte zum Beispiel $V = V(X^p - a)$ für geeignetes $a \in K$ und geeignete Körper K und L der Charakteristik $p > 0$.)

Aufgabe 3.
Fixiere die gradlexikographische Monomordnung auf $[X, Y]$ mit $X > Y$. Seien

$$f_1 = X^2Y + X + 1 \quad \text{und} \quad f_2 = Y^3 + XY + 2,$$

$F := \{f_1, f_2\} \subseteq \mathbb{Q}[X, Y]$ und $f := X^3Y^3 + 2X + Y$. Finde verschiedene modulo F reduzierte $p, q \in \mathbb{Q}[X, Y]$ mit $f \xrightarrow[F]{*} p$ und $f \xrightarrow[F]{*} q$ und führe jeweils die Reduktion explizit per Hand durch.

Aufgabe 4.(Monomordnungen)
Im Folgenden beachte Bemerkung 2.1.4 aus der Vorlesung.

a) Sei $n \in \mathbb{N}$ und $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Definiere zu $x, y \in \mathbb{N}^n$

$$x \leq_A y \; :\Longleftrightarrow \; Ax \leq_{\text{lex}} Ay$$

Zeige, dass $\leq \; := \; \leq_A$ reflexiv und transitiv ist und für alle $x, y, z \in \mathbb{N}^n$ gilt

$$x \leq y \implies x + z \leq y + z$$

und dass $\leq$ genau dann antisymmetrisch ist, wenn die Spalten von A $\mathbb{Q}$-linear unabhängig sind.

b) Seien nun die Spalten von A $\mathbb{Q}$-linear unabhängig. Zeige, dass $\leq_A$ genau dann eine Monomordnung ist, wenn in jeder Spalte von A der oberste von Null verschiedene Eintrag positiv ist.

c) Finde jeweils zu $\leq \in \{\leq_{\text{lex}}, \leq_{\text{lex}}^{\text{deg}}, \leq_{\text{revlex}}, \leq_{\text{revlex}}^{\text{deg}}\}$ eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit $\leq \; = \; \leq_A$.

Abgabe bis Montag, den 5. Dezember 2011, 10:14 Uhr in die Zettelkästen neben F411.