Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Wintersemester 2011/2012

Sebastian Gruler
Christoph Hanselka
Markus Schweighofer

Übungsblatt 11 zur Algorithmischen Algebraischen Geometrie

Aufgabe 1. (Shape Lemma) Sei $C|K$ eine Körpererweiterung, K vollkommen und C algebraisch abgeschlossen. Sei $I \subseteq K[\underline{X}]$ ein Radikalideal und $V(I) \subseteq C^n$ seine Varietät. Gelte

$$0 < d := \#V(I) < \infty.$$

Bezeichne $\pi\colon C^n \to C, (x_1, \dots, x_n) \mapsto x_n$ die Projektion auf die letzte Komponente. Die Einschränkung von π auf $V(I)$ sei injektiv.

(a) Zeige, dass $\overline{1}, \overline{X_n}, \dots, \overline{X_n^{d-1}}$ eine Basis des K-Vektorraums $K[\underline{X}]/I$ bilden.

(b) Sei G die eindeutig bestimmte reduzierte Gröbnerbasis von I bezüglich der lexikographischen Ordnung $\leq_{\text{lex}}$ auf $[\underline{X}]$. Zeige, dass es $h_1, \dots, h_n \in K[X_n]$ gibt mit $\deg(h_i) \leq d - 1$ für $i \in \{1, \dots, n\}$ derart, dass

$$G = \{X_1 + h_1, \dots, X_{n-1} + h_{n-1}, X_n^d + h_n\}.$$

Aufgabe 2. Sei $I := ((X-Y)^3 - Z^2, (Y-Z)^3 - X^2, (Z-X)^3 - Y^2) \subseteq \mathbb{Q}[X,Y,Z]$. Für die folgenden Aufgaben darfst Du `SINGULAR` benutzen.

(a) Zeige, dass $V(I) \subseteq \mathbb{C}^3$ endlich ist.

(b) Berechne $p \in \mathbb{Q}[Z]$ mit $I \cap \mathbb{Q}[Z] = (p)$.

(c) Begründe, warum $I \cap \mathbb{Q}[X] = p(X)$ und $I \cap \mathbb{Q}[Y] = p(Y)$.

(d) Berechne ein Erzeugendensystem des Radikals $\sqrt{I}$ von I.

(e) Bestimme $\#V(I)$.

Aufgabe 3. Sei das Ideal

$$\begin{aligned} I := (&24XY - X^2 - Y^2 - X^2Y^2 - 13, \\ &24XZ - X^2 - Z^2 - X^2Z^2 - 13, \\ &24YZ - Y^2 - Z^2 - Y^2Z^2 - 13) \quad \subseteq \mathbb{Q}[X,Y,Z] \end{aligned}$$

gegeben und betrachte seine Varietät $V(I) \subseteq \mathbb{C}^3$. Bestimme $\#V(I)$ mit `SINGULAR`.

Abgabe bis Montag, den 16. Januar 2012, 10:14 Uhr in die Zettelkästen neben F411.