Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Sommersemester 2011

Christoph Hanselka
Aaron Kunert
Markus Schweighofer

Übungsblatt 1 zur Zahlentheorie

Aufgabe 1.
Sei R ein Ring. Die Elemente der abelschen Gruppe $R^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ aller Funktionen $A\colon \mathbb{N}\times\mathbb{N}\to R$ kann man als „unendliche Matrizen" über R auffassen. Damit bei der noch zu definierenden „Matrizenmultiplikation" keine unendlichen Summen auftauchen, betrachten wir die Untergruppe S von $R^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$, die aus allen Funktionen $A\colon \mathbb{N}\times\mathbb{N}\to R$ besteht, deren Zeilen $A(i,\cdot)$ $(i\in\mathbb{N})$ alle einen endlichen Träger $\{j\in\mathbb{N}\mid A(i,j)\neq 0\}$ haben und deren Spalten $A(\cdot,j)$ $(j\in\mathbb{N})$ ebenfalls alle einen endlichen Träger $\{i\in\mathbb{N}\mid A(i,j)\neq 0\}$ haben.

(a) Zeige, dass für $A,B\in S$ das Produkt AB erklärt durch

$$(AB)(i,k) := \sum_{j\in\mathbb{N}} A(i,j)B(j,k) \qquad (i,k\in\mathbb{N})$$

wieder in S liegt.

(b) Zeige, dass durch die so definierte Multiplikation S zu einem Ring wird.

(c) Für jede solche „Matrix" $A\in S$ bezeichne $A_1\in S$ die Matrix, die aus A durch Streichen aller geraden Spalten hervorgeht, und $A_2\in S$ die Matrix, die aus A durch Streichen aller ungeraden Spalten hervorgeht. Zeige, dass die Abbildung

$$f\colon S\to S^2,\ A\mapsto (A_1,A_2)$$

ein S-Modulisomorphismus ist.

Aufgabe 2.
Beweise den Homomorphiesatz und den Isomorphiesatz für Moduln.

Aufgabe 3.
Formuliere eine Frage an den Übungsleiter, die den Unterschied zwischen Moduln und Vektorräumen betrifft.

Abgabe bis Montag, den 18. April 2011, 10 Uhr in die Briefkästen neben F411.