Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Sommersemester 2011

Christoph Hanselka
Aaron Kunert
Markus Schweighofer

Übungsblatt 3 zur Zahlentheorie

Sei R ein Ring.

Aufgabe 1.
Zeige, dass jeder endlich erzeugte $\mathbb{Z}$–Untermodul von $\mathbb{Q}$ frei vom Rang 1 ist, jedoch $\mathbb{Q}$ selbst nicht frei als $\mathbb{Z}$–Modul ist.

Aufgabe 2.
Sei M ein R–Modul. Zeige

(a) Es gibt einen R–Modul N, einen freien R–Modul F und eine kurze exakte Sequenz (vgl. Blatt 2, Aufgabe 1)
$$0 \longrightarrow N \longrightarrow F \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

(b) Ist R aufgefasst als Modul über sich selbst halbeinfach, so ist M halbeinfach.

(c) Jeder endlich erzeugte Modul M über $R = M_{n\times n}(K)$ (für $n \in \mathbb{N}$ und K ein Körper) ist halbeinfach.

Aufgabe 3.
Seien L,M und N Moduln über R und
$$0 \longrightarrow L \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow 0$$
eine kurze exakte Sequenz (vgl. Blatt 2, Aufgabe 1). Zeige, dass diese zerfällt, wenn N frei ist. Zeige durch Gegenbeispiel, dass die Sequenz im Allgemeinen nicht zerfällt, wenn man stattdessen voraussetzt, dass M frei ist.

Aufgabe 4.
Seien M und N zwei R–Moduln von endlicher Länge. Angenommen in Kompositionsreihen von M und N treten (mit Vielfachheit) die gleichen Kompositionsfaktoren auf. Gilt dann $M \cong N$? Finde einen Beweis oder ein Gegenbeispiel.

Abgabe bis Montag, den 9. Mai 2011, 10 Uhr in die Briefkästen neben F411.