Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Sommersemester 2011

Christoph Hanselka
Aaron Kunert
Markus Schweighofer

Übungsblatt 7 zur Zahlentheorie

Aufgabe 1.
Sind die Ringe

(a) $\mathbb{Z}[X]$

(b) $\mathbb{Z}[X]/(X^2+4)$

(c) $\mathbb{Z}[X]/(X^2-3X+2)$

ganz abgeschlossen?

Aufgabe 2.
Sei R ein Dedekindring und seien $\mathfrak{p}$,$\mathfrak{q} \neq (0)$ verschiedene Primideale und M ein zyklischer R–Modul. Zeige, dass für alle n, $m \in \mathbb{N}_0$ die Ideale $\mathfrak{p}^n$ und $\mathfrak{q}^m$ koprim sind. Folgere daraus, dass es paarweise verschiedene Primideale $\mathfrak{p}_1,\ldots,\mathfrak{p}_r$ und $e_1,\ldots,e_r \in \mathbb{N}$ gibt mit

$$M \cong R/\mathfrak{p}^{e_1} \times \cdots \times R/\mathfrak{p}^{e_r}.$$

Aufgabe 3.

Sei R ein Integritätsring. Beweise oder widerlege folgende Behauptungen

(a) Für je zwei gebrochene Ideale I,J gilt $(I:J)\cdot J = I$.

(b) Für gebrochenen Ideale I,J und K gilt $((I:J):K) = (I:JK)$.

(c) Für J, $I_1,\ldots,I_r$ gebrochene Ideale gilt

$$\left(\bigcap_{i=1}^r I_i : J\right) = \bigcap_{i=1}^r (I_i : J).$$

(d) Für J, $I_1,\ldots,I_r$ gebrochene Ideale gilt

$$\left(J : \sum_{i=1}^r I_i\right) = \sum_{i=1}^r (J : I_i).$$

Abgabe bis Montag, den 6. Juni 2011, 10 Uhr in die Briefkästen neben F411.