Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Sommersemester 2011

Christoph Hanselka
Aaron Kunert
Markus Schweighofer

Übungsblatt 8 zur Zahlentheorie

Aufgabe 1.
Sei $L|K$ eine separable Körpererweiterung mit $n := [L : K] < \infty$. Seien $x_1, \ldots, x_n \in L$ und $\sigma \in S_n$. Zeige $d_{L|K}(x_1, \ldots, x_n) = d_{L|K}(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)})$.

Aufgabe 2.
Sei $z \in \mathbb{C}$ mit $z^3 + 2z + 1 = 0$. Zeige $[\mathbb{Q}(z) : \mathbb{Q}] = 3$, finde eine Basis (x_1, x_2, x_3) des $\mathbb{Z}$-Moduls $\mathbb{Z}[z]$ und berechne die Diskriminante von (x_1, x_2, x_3) bezüglich $\mathbb{Q}(z)|\mathbb{Q}$.

Aufgabe 3.
Diese Aufgabe stellt einen ersten Schritt dar, um zu zeigen, dass die Gleichung $x^3 + y^3 = z^3$ keine Lösung $x,y,z \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ besitzt. Betrachte den Zahlring $R := \mathbb{Z}[\omega]$ des quadratischen Zahlkörpers $K := \mathbb{Q}(\pi) \subseteq \mathbb{C}$ mit

$$\pi := \mathbb{i}\sqrt{3} = \sqrt{-3} \text{ und } \omega := \frac{1+\pi}{2}.$$

Bezeichne $N := N_{K|\mathbb{Q}}$ die Norm von $K|\mathbb{Q}$ und $z \mapsto z^*$ die komplexe Konjugation auf $\mathbb{C}$.

(a) Zeige, dass $N(a + b\omega) = (a + b\omega)(a + b\omega)^* = |a + b\omega|^2 = a^2 + ab + b^2$ für alle $a,b \in \mathbb{Q}$.

(b) Zeichne R als Punktmenge in der komplexen Zahlenebene.

(c) Zeige, dass R euklidisch ist.

(d) Zeige $\pi = 2\omega - 1 = -\pi^*$, $\omega^2 = \omega - 1 = \frac{\pi-1}{2} = -\omega^*$, $R^* = R$ und $K^* = K$.

(e) Zeige $R^\times = \{x \in R \mid N(x) \in \mathbb{Z}^\times\} = \{\pm 1, \pm\, \omega, \pm\, \omega^*\}$.

(f) Zeige, dass π in R ein Primelement ist. (**Hinweis:** Benutze (e) und dass R faktoriell ist.)

Wir nehmen ab jetzt an, dass wir $x,y,z \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ haben mit $\quad (*)\ \ x^3 + y^3 = z^3$.

(g) Zeige, dass mindestens eine der Zahlen x,y,z in $\mathbb{Z}$ durch 3 teilbar ist.
Hinweis: Betrachte die Gleichung $(*)$ in $\mathbb{Z}/(9)$.

(h) Zeige, dass eine neue Gleichung $(*)$ mit neuen $x,y,z \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ gefunden werden kann, die folgende Annahme rechtfertigt:

Wir nehmen ab jetzt an, dass 3 ein Teiler von z in $\mathbb{Z}$ ist, aber weder von x noch von y.

(i) Zeige, dass man $(*)$ über R wie folgt schreiben kann: $\quad (**)\ \ (x + y)(x - \omega y)(x - \omega^* y) = z^3$.

(j) Zeige $N(x + y) \equiv_{(3)} N(x - \omega y) = N(x - \omega^* y)$.

(k) Zeige, dass $x - \omega y$ und $x - \omega^* y$ in R jeweils von π aber nicht von π^2 geteilt werden.

Hintergrund zum Fermat-Problem: `http://www.rzuser.uni-heidelberg.de/~ci3/fermat.pdf`

Abgabe bis Mittwoch, den 15. Juni 2011, 10 Uhr in die Briefkästen neben F411.