Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Sommersemester 2011

Christoph Hanselka
Aaron Kunert
Markus Schweighofer

Übungsblatt 11 zur Zahlentheorie

Aufgabe 1.
Sei K ein algebraischer Zahlkörper vom Grad n. Sei weiter G ein freier $\mathbb{Z}$–Untermodul von K mit Basis $x_1, \dots, x_n$.

(a) Zeige, dass es ein $s \in \mathbb{N}$ gibt derart, dass $sG \subseteq \mathcal{O}_K$ und $s\mathcal{O}_K \subseteq G$.

(b) Zeige, dass die *Diskriminante* von G

$$d(G) := \mathrm{d}_{K|\mathbb{Q}}(x_1, \dots, x_n)$$

wohldefiniert ist, das heißt nicht von der Wahl der Basis $x_1, \dots, x_n$ von G abhängt.

(c) Sei H ein freier $\mathbb{Z}$–Untermodul von G vom Rang n. Zeige $[G : H] < \infty$ und

$$[G : H]^2 d(G) = d(H).$$

Aufgabe 2.
Sei K ein algebraischer Zahlkörper vom Grad n und R ein Unterring des Zahlrings $\mathcal{O}_K$ mit $\mathrm{qf}(R) = K$. Zeige:

(a) R ist ein freier $\mathbb{Z}$-Modul vom Rang n.

(b) Gibt es kein $p \in \mathbb{P}$ mit $p^2 \mid d(R)$, so ist $R = \mathcal{O}_K$.

Aufgabe 3.
Sei $z \in \mathbb{C}$ mit $z^3 - z + 3 = 0$.

(a) Bestimme den Grad des Zahlkörpers $K := \mathbb{Q}(z)$.

(b) Bestimme den Zahlring $\mathcal{O}_K$ von K.

Abgabe bis Montag, den 4. Juli 2011, 10 Uhr in die Briefkästen neben F411.