
Übungsblatt 3 zur Darstellungstheorie endlicher Gruppen

Aufgabe 1. Betrachte die 8-elementige Diedergruppe D_4 .

- (a) Gebe irreduzible unitäre Matrizendarstellungen von D_4 an so, dass jede irreduzible Darstellung der D_4 zu genau einer dieser isomorph ist.
- (b) Rechne in diesem Beispiel direkt nach, dass die Matrixkoeffizienten der Darstellungen aus (a) eine orthogonale Basis von $L(D_4)$ bilden.

Aufgabe 2. Sei $\rho: G \rightarrow \text{Aut}(V)$ eine Darstellung der Gruppe G auf dem endlichdimensionalen \mathbb{C} -Vektorraum $V \neq 0$ und betrachte

$$A := \sum_{g \in G} \mathbb{C} \rho_g \subseteq \text{End}(V).$$

Zeige die Äquivalenz folgender Aussagen:

- (a) ρ ist irreduzibel
- (b) $\forall v, w \in V \setminus \{0\} : \exists f \in A : f(v) = w$
- (c) $A = \text{End}(V)$

Anleitung: Man zeige (b) \implies (c) für beliebige multiplikativ abgeschlossene Unterräume $A \subseteq \text{End}(V)$ durch Induktion nach $\dim V$, wobei man im Induktionsschritt wie folgt vorgehen kann:

- (1) Zeige, dass $B_f := \{f \circ g|_{\text{im } f} \mid g \in A\}$ für jedes $f \in A$ ein multiplikativ abgeschlossener Unterraum von $\text{End}(\text{im } f)$ ist.
- (2) Zeige mit Hilfe der Induktionsvoraussetzung $B_f = \text{End}(\text{im } f)$ für alle $f \in A$ mit $\dim(\text{im } f) < \dim V$.
- (3) Wähle $f \in A \setminus \{0\}$ mit kleinstmöglicher Dimension von $W := \text{im } f$ und setze $B := B_f$.
- (4) Zeige unter Ausnutzung von $B = \text{End}(W)$, dass die Annahme $\dim W \geq 2$ im Widerspruch zur Wahl von f steht.
- (5) Zeige, dass man $w \in V$ und $\varphi \in V^*$ wählen kann mit $f(v) = \varphi(v)w$ für alle $v \in V$.
- (6) Zeige mit der Voraussetzung (b), dass $\{v \in V \mid \forall g \in A : \varphi(g(v)) = 0\} = \{0\}$.
- (7) Folgere $V^* = \{\varphi \circ g \mid g \in A\}$.
- (8) Zeige, dass A alle Endomorphismen von V mit eindimensionalem Bild enthält.

Abgabe bis Montag, den 3. Dezember, um 11:44 Uhr in die Zettelkästen neben F411.