Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Wintersemester 2012/2013

Christoph Hanselka
Markus Schweighofer

Übungsblatt 4 zur Darstellungstheorie endlicher Gruppen

Das *Legendre-Symbol* $\left(\frac{\cdot}{\cdot}\right)$ ist für $x \in \mathbb{Z}$ und $p \in \mathbb{P}$ definiert durch

$$\left(\frac{x}{p}\right) := \begin{cases} 1 & \text{falls } 0 \not\equiv_{(p)} x \equiv_{(p)} a^2 \text{ für ein } a \in \mathbb{Z}, \\ 0 & \text{falls } x \equiv_{(p)} 0, \\ -1 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Ziel dieses Blattes ist es, mit Hilfe der diskreten Fouriertransformation, das *quadratische Reziprozitätsgesetz* zu beweisen, welches besagt, dass für je zwei verschiedene ungerade Primzahlen p und q gilt:

$$\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}\frac{q-1}{2}}$$

Aufgabe 1. Sei p eine ungerade Primzahl.

(a) Zeige mit Hilfe der Tatsache, dass endliche Untergruppen der multiplikativen Gruppe eines Körpers zyklisch sind, dass für alle $x \in \mathbb{Z}$ gilt

$$\left(\frac{x}{p}\right) \equiv_{(p)} x^{\frac{p-1}{2}}.$$

(b) Folgere hieraus $\left(\frac{-1}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}}$.

(c) Zeige für alle $x, y \in \mathbb{Z}$

$$\left(\frac{x}{p}\right)\left(\frac{y}{p}\right) = \left(\frac{xy}{p}\right).$$

Aufgabe 2. Es seien p und q zwei verschiedene ungerade Primzahlen und $G := \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Für alle $f \in L(G)$ sei $\tau f \in L(G)$ definiert durch $(\tau f)(g) := f(-g)$ $(x \in G)$ und $\widehat{f} \in L(G)$ bezeichne die Fouriertransformierte von f aus Übungsblatt 1.

(a) Zeige dass für alle $f \in L(G)$ gilt

$$\tau\widehat{f} = \widehat{\tau f} \quad \text{und} \quad \widehat{\widehat{f}} = p\, \tau f.$$

(b) Zeige, dass für $f_p \in L(G)$ definiert durch $f_p(\overline{x}) = \left(\frac{x}{p}\right)$ $(x \in \mathbb{Z})$ gilt

$$\widehat{f_p} = \widehat{f_p}(-1)\, \tau f_p.$$

(c) Folgere

$$\left(\widehat{f_p}(-1)\right)^2 f_p = p\ \tau f_p.$$

Aufgabe 3. Sei nun $\omega \in \mathbb{C}$ eine primitive p-te Einheitswurzel.

(a) Zeige $\widehat{f}(g) \in \mathbb{Z}[\omega]$ für alle $f \in \mathbb{Z}^G \subseteq L(G)$ und $g \in G$.

(b) Zeige für $g \in G$

$$\left(\widehat{f_p}(g)\right)^q \equiv_{(q)} \widehat{f_p}(qg) \text{ in } \mathbb{Z}[\omega].$$

(c) Zeige, dass für $\alpha := \widehat{f_p}(-1) \in \mathbb{Z}[\omega]$

$$\begin{aligned} \alpha^q &\equiv_{(q)} \alpha \left(\frac{q}{p}\right) \quad \text{in } \mathbb{Z}[\omega], \\ \alpha^2 &= (-1)^{\frac{p-1}{2}} p \qquad \text{und} \\ \alpha^{q-1} &\equiv_{(q)} (-1)^{\frac{p-1}{2}\frac{q-1}{2}} \left(\frac{p}{q}\right) \end{aligned}$$

gelten.

(d) Vollende nun den Beweis des quadratischen Reziprozitätsgesetzes.

Abgabe bis Montag, den 17. Dezember, um 11:44 Uhr in die Zettelkästen neben F411.