Universität Konstanz Sebastian Gruler
Fachbereich Mathematik und Statistik María López Quijorna
Wintersemester 2012/2013 Markus Schweighofer

Übungsblatt 1 zur Reellen Algebraischen Geometrie I

Auf diesem Blatt wird unter anderem die Existenz und Eindeutigkeit der reellen Zahlen gezeigt. Deshalb dürfen Sie die reellen Zahlen hier nicht benutzen.

Aufgabe 1. Sei $(K, \leq)$ ein angeordneter Körper und seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergente Folgen in K mit $a := \lim_{n\to\infty} a_n$ und $b := \lim_{n\to\infty} b_n$. Zeige

$$\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = a + b \qquad \text{und} \qquad \lim_{n\to\infty}(a_n b_n) = ab.$$

Aufgabe 2. Sei $(K, \leq)$ ein angeordneter Körper. Zeige die Äquivalenz der Aussagen:

(a) $(K, \leq)$ ist archimedisch und Cauchy-vollständig.

(b) $(K, \leq)$ ist vollständig.

Anleitung: Gelte zunächst (a) und sei $A \subseteq K$ eine nichtleere nach oben beschränkte Teilmenge. Wähle für jedes $n \in \mathbb{N}$ das kleinste $k_n \in \mathbb{Z}$ mit $\forall a \in A : a \leq \frac{k_n}{n}$ und setze $a_n := \frac{k_n}{n} \in \mathbb{Q}$ (benutze die Archimedizität!). Zeige, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge und damit konvergent ist. Zeige nun, dass $a := \lim_{n\to\infty} a_n$ eine kleinste obere Schranke von A in $(K, \leq)$ ist.

Umgekehrt benutze Kontraposition. Sei zunächst $(K, \leq)$ nicht archimedisch, das heißt die Menge $A := \{a \in K \mid \forall N \in \mathbb{N} : a \leq -N\}$ ist nicht leer. Wir behaupten, dass A keine kleinste obere Schranke besitzt. In der Tat: Ist $a \in K$ eine obere Schranke von A, so zeige, dass auch $a - 1$ eine solche ist.

Sei nun $(K, \leq)$ nicht Cauchy-vollständig, etwa $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in K, die nicht konvergiert. Zeige, dass dann $A := \{a \in K \mid \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N : a \leq a_n\}$ nichtleer und nach oben beschränkt ist, aber keine kleinste obere Schranke besitzt.

Aufgabe 3. Sei $(K, \leq)$ ein archimedisch angeordneter Körper und $(R, \leq_R)$ ein vollständiger angeordneter Körper. Zeige, dass es genau eine Einbettung $(K, \leq) \hookrightarrow (R, \leq_R)$ gibt und dass diese genau dann ein Isomorphismus ist, wenn $(K, \leq)$ vollständig ist.

Aufgabe 4. Zeige, dass es einen vollständigen angeordneten Körper $(\mathbb{R}, \leq)$ gibt und dass dieser im Wesentlichen eindeutig ist: Ist $(K, \leq_K)$ ein weiterer vollständig angeordneter Körper, so gibt es genau einen Isomorphismus von $(K, \leq_K)$ nach $(\mathbb{R}, \leq)$.

Anleitung: Folgere die Eindeutigkeit aus Aufgabe 3. Zur Existenz: Zeige, dass die Cauchy-Folgen in $\mathbb{Q}$ einen Unterring C von $\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ bilden und dass

$$I := \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in C \mid \lim_{n\to\infty} a_n = 0\}$$

darin ein maximales Ideal ist. Setze $\mathbb{R} := C/I$. Zeige, dass durch

$$a \leq b :\iff \exists (a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in C : (a = \overline{(a_n)_{n\in\mathbb{N}}}^I \ \& \ b = \overline{(b_n)_{n\in\mathbb{N}}}^I \ \& \ \forall n \in \mathbb{N} : a_n \leq b_n)$$

($a, b \in \mathbb{R}$) eine Anordnung $\leq$ auf $\mathbb{R}$ definiert wird. Es ist klar, dass $\mathbb{R}$ archimedisch ist. Nach Aufgabe 2 reicht es zu zeigen, dass $(\mathbb{R}, \leq)$ Cauchy-vollständig ist. Sei hierzu $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $(\mathbb{R}, \leq)$. Nach 1.1.10 gibt es eine Folge $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{Q}$ mit $|a_n - q_n| < \frac{1}{n}$ für $n \in \mathbb{N}$. Zeige, dass mit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auch $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $(\mathbb{R}, \leq)$ und damit in $\mathbb{Q}$ ist, also $(q_n)_{n\in\mathbb{N}} \in C$. Setze $a := \overline{(q_n)_{n\in\mathbb{N}}}^I$. Zeige $\lim_{n\to\infty} a_n = a$.

Abgabe bis Montag, den 5. November, um 12:00 Uhr in die Zettelkästen neben F411 .