Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Wintersemester 2012/2013

Sebastian Gruler
María López Quijorna
Markus Schweighofer

Übungsblatt 2 zur Reellen Algebraischen Geometrie I

Aufgabe 5. Sei K ein Körper.

(a) Zeige, dass $A := \{f \in K^{\mathbb{Z}} \mid \exists \ell \in \mathbb{Z} : \forall k \in \mathbb{Z}_{<\ell} : f(k) = 0\}$ ein Unterraum des K-Vektorraums $K^{\mathbb{Z}}$ ist.

(b) Zeige, dass die Abbildung

$$A \times A \to A,\ (f,g) \mapsto f * g := (k \mapsto \sum_{\substack{i,j \in \mathbb{Z} \\ i+j=k}} f(i)g(j))$$

sinnvoll definiert ist. Man nennt $*$ die *Faltung* auf A.

(c) Zeige, dass A mit $*$ als Multiplikation zu einer K-Algebra wird.

Aufgabe 6. Sei K ein Körper. Definiere in sinnvoller Weise den *Ring der formalen Laurentreihen*

$$K((X)) := \Big\{ \sum_{k=\ell}^{\infty} a_k X^k \mid \ell \in \mathbb{Z}, a_k \in K \Big\}$$

und zeige, dass es ein Körper ist, der den Körper $K(X)$ der rationalen Funktionen und den Potenzreihenring $K[[X]] := \{\sum_{k=0}^{\infty} a_k X^k \mid a_k \in K\}$ jeweils echt enthält.

Aufgabe 7. Zeige, dass jedes Element von $\mathbb{R}[[X]]$ mit positivem konstanten Koeffizienten ein Quadrat in $\mathbb{R}[[X]]$ ist.

Aufgabe 8. Zeige, dass $\mathbb{R}((X))$ genau zwei Anordnungen besitzt.

Abgabe bis Donnerstag, den 8. November, um 11:44 Uhr in die Zettelkästen neben F411
.