Universität Konstanz Sebastian Gruler
Fachbereich Mathematik und Statistik María López Quijorna
Wintersemester 2012/2013 Markus Schweighofer

Aufgabe 10 zur Reellen Algebraischen Geometrie I: Musterlösung

---

Aufgabe 10. Für jeden Körper K bezeichne $\operatorname{sper}(K)$ jeweils die Menge seiner Anordnungen. Schreibe $\operatorname{sper}(\mathbb{R}(X)) = \{P_{\pm\infty}\} \cup \{P_{t\pm} \mid t \in \mathbb{R}\}$ wie in Beispiel 1.3.8 aus der Vorlesung. Betrachte die Abbildung

$$\Psi\colon \operatorname{sper}(\mathbb{R}(X)) \to \operatorname{sper}(\mathbb{Q}(X)),\ P \mapsto P \cap \mathbb{Q}(X)$$

und sei $Q \in \operatorname{sper}(\mathbb{Q}(X))$.

(a) Zeige, dass genau einer der folgenden Fälle eintritt:
  (1) $\Psi^{-1}(\{Q\}) = \{P_{-\infty}\}$
  (2) $\Psi^{-1}(\{Q\}) = \{P_{\infty}\}$
  (3) $\Psi^{-1}(\{Q\}) = \{P_{t-}\}$ für ein über $\mathbb{Q}$ algebraisches $t \in \mathbb{R}$
  (4) $\Psi^{-1}(\{Q\}) = \{P_{t+}\}$ für ein über $\mathbb{Q}$ algebraisches $t \in \mathbb{R}$
  (5) $\Psi^{-1}(\{Q\}) = \{P_{t-}, P_{t+}\}$ für ein über $\mathbb{Q}$ nicht algebraisches $t \in \mathbb{R}$

(b) Zeige, dass dabei Q genau dann archimedisch ist, wenn der letzte Fall (5) eintritt.

Lösungsskizze: Wir nennen ein Element $f \in \mathbb{Q}(X)$ vom *Typ* $t \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, wenn $f \geq_Q r$ für alle $r \in \mathbb{Q}_{<t}$ und $f \leq_Q r$ für alle $r \in \mathbb{Q}_{>t}$.

Ist $f \in \mathbb{Q}(X)$ sowohl vom Typ s als auch vom Typ t mit $s, t \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, so $s = t$, denn sonst könnte man $s < t$ annehmen und es folgte für alle r aus der unendlichen Menge $\mathbb{Q}_{>s} \cap \mathbb{Q}_{<t}$, dass $r \leq_Q f \leq_Q r$ und daher $f = r$.

Man überlegt sich nun leicht, dass jedes $f \in \mathbb{Q}(X)$ genau einen Typ $\tau(f)$ hat, nämlich

$$(*)\qquad \tau(f) = \sup\{r \in \mathbb{Q} \mid r \leq_Q f\} = \inf\{r \in \mathbb{Q} \mid f \leq_Q r\} \in \{-\infty\} \cup \mathbb{R} \cup \{\infty\},$$

wobei Supremum und Infimum in der angeordneten Menge $\{-\infty\} \cup \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ wegen der Vollständigkeit des angeordneten Körpers der reellen Zahlen existieren und $Q \cap \mathbb{Q} = \mathbb{Q}_{\geq 0}$ eingeht. Insbesondere gilt $\tau(r) = r$ für alle $r \in \mathbb{Q}$.

Behauptung 1: Ist $f \in \mathbb{Q}(X)$ vom Typ $t \in \mathbb{R}$, so ist $-f$ vom Typ $-t$.
Begründung: Sei $f \in \mathbb{Q}(X)$ vom Typ $t \in \mathbb{R}$. Zu zeigen ist $-f \geq_Q r$ für alle $r \in \mathbb{Q}_{<-t}$ und $-f \leq_Q r$ für alle $r \in \mathbb{Q}_{>-t}$. Dazu ist offensichtlich äquivalent, dass $-f \geq_Q -r$ für alle $r \in \mathbb{Q}_{>t}$ und $-f \leq_Q -r$ für alle $r \in \mathbb{Q}_{<t}$.

Behauptung 2: Ist $f \in \mathbb{Q}(X)$ vom Typ $t \in \mathbb{R}^\times$, so ist $f \neq 0$ und $\frac{1}{f}$ vom Typ $\frac{1}{t}$.

Begründung: Sei $f \in \mathbb{Q}(X)$ vom Typ $t \in \mathbb{R}^\times$. Wegen Behauptung 1 kann man ohne Einschränkung $t > 0$ voraussetzen. Wegen $\tau(0) = 0$ gilt dann $f \neq 0$. Zu zeigen ist $\frac{1}{f} \geq_Q r$ für alle $r \in \mathbb{Q}_{<\frac{1}{t}}$ und $\frac{1}{f} \leq_Q r$ für alle $r \in \mathbb{Q}_{>\frac{1}{t}}$. Dazu ist offensichtlich äquivalent, dass $\frac{1}{f} \geq_Q \frac{1}{r}$ für alle $r \in \mathbb{Q}_{>t}$ und $\frac{1}{f} \leq_Q \frac{1}{r}$ für alle $r \in \mathbb{Q}_{<t}$.

Behauptung 3: Ist $f \in \mathbb{Q}(X)$ vom Typ $s \in \mathbb{R}$ und $g \in \mathbb{Q}(X)$ vom Typ $t \in \mathbb{R}$, so ist $f+g$ vom Typ $s+t$.
Begründung: Mit $(*)$ zeigt man leicht $\tau(f) + \tau(g) \leq \tau(f+g)$ für alle $f, g \in \mathbb{Q}(X)$ mit $\tau(f), \tau(g) \in \mathbb{R}$. Für solche f, g gilt dann aber hier sogar Gleichheit, denn wieder mittels $(*)$ sieht man leicht $\tau(f+g) \in \mathbb{R}$ und wegen der schon bewiesenen Ungleichung hat man dann $\tau(f+g) - \tau(f) \overset{\text{Beh.1}}{=} \tau(f+g) + \tau(-f) \leq \tau((f+g) - f) = \tau(g)$ und daher $\tau(f) + \tau(g) \geq \tau(f+g)$.

Behauptung 4: Ist $f \in \mathbb{Q}(X)$ vom Typ $s \in \mathbb{R}$ und $g \in \mathbb{Q}(X)$ vom Typ $t \in \mathbb{R}$, so ist fg vom Typ st.
Begründung: Wegen Behauptung 1 kann man ohne Einschränkung $f, g \in Q$ voraussetzen. Mit $(*)$ folgt daraus $s \geq 0$ und $t \geq 0$. Ebenfalls ohne Einschränkung hat man $f \neq 0$ und $g \neq 0$. Wir behandeln zunächst den Fall $s = 0$. Wegen $(*)$ gilt dann $f \leq_Q \frac{1}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Weiter gibt es wegen $(*)$ ein $c \in \mathbb{Q}_{>0}$ mit $g \leq_Q c$. Es folgt $fg \leq_Q \frac{c}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und daher $0 \leq_Q fg \leq_Q \frac{1}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Mit $(*)$ folgt daraus $\tau(fg) = 0 = 0t = st$. Analog behandelt man den Fall $t = 0$. Im verbleibenden Fall $s > 0$ und $t > 0$ argumentiert man genau wie in Beweis der Behauptung 3, wobei man Behauptung 2 statt Behauptung 1 verwendet.

Behauptung 5: $\{f \in \mathbb{Q}(X) \mid \tau(f) > 0\} \subseteq Q$ und $\{f \in \mathbb{Q}(X) \mid \tau(f) < 0\} \subseteq -Q$
Begründung: Dies folgt leicht aus $(*)$.

Behauptung 6: Ist X vom Typ $t \in \mathbb{R}$ und $f \in \mathbb{Q}[X]$ ein Polynom, so ist f vom Typ $f(t)$.
Begründung: Dies folgt leicht aus den Behauptungen 3 und 4.

Behauptung 7: Ist X von einem Typ $t \in \mathbb{R}$, der über $\mathbb{Q}$ nicht algebraisch ist, so ist

$$Q = \{f \in \mathbb{Q}(X) \mid f(t) \geq 0\}.$$

Begründung: Da t nicht algebraisch über $\mathbb{Q}$ ist, ist kann man jede rationale Funktion $f \in \mathbb{Q}(X)$ in t auswerten und es gilt $f(t) = 0 \iff f = 0$. Weiter gilt nach den Behauptungen 6 und 2 dabei $f(t) = \tau(f)$. Nun genügt es, Behauptung 5 anzuwenden.

Behauptung 8: Ist X von einem Typ $t \in \mathbb{R}$, der über $\mathbb{Q}$ algebraisch ist, $p \in \mathbb{Q}[X]$ das Minimalpolynom von t über $\mathbb{Q}$ und $\delta := \operatorname{sgn}_Q(p)$, so ist

$$Q = \{0\} \cup \left\{p^k \frac{g}{h} \mid g, h \in \mathbb{Q}[X], k \in \mathbb{Z}, \delta^k g(t)h(t) > 0\right\}.$$

Begründung: Jedes $f \in \mathbb{Q}(X)^\times$ lässt sich in der Form $f = p^k \frac{g}{h}$ mit $g, h \in \mathbb{Q}[X]$ und $k \in \mathbb{Z}$ schreiben derart, dass $g(t)h(t) \neq 0$. Wir zeigen

$$f \in Q \iff \delta^k g(t)h(t) > 0.$$

Seien hierzu $g, h \in \mathbb{Q}[X]$ mit $g(t)h(t) \neq 0$ und $k \in \mathbb{Z}$. Nach Behauptung 6 gilt $\tau(g), \tau(h) \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Nun haben wir $\tau(\frac{g}{h}) \overset{\text{Beh.4}}{=} \tau(g)\tau(\frac{1}{h}) \overset{\text{Beh.2}}{=} \frac{\tau(g)}{\tau(h)} \overset{\text{Beh.6}}{=} \frac{g(t)}{h(t)}$ und daher $\operatorname{sgn}_Q(f) = \operatorname{sgn}_Q(p^k)\operatorname{sgn}_Q(\frac{g}{h}) \overset{\text{Beh.5}}{=} \delta^k \operatorname{sgn}_Q(\tau(\frac{g}{h})) = \delta^k \operatorname{sgn}_Q(\frac{g(t)}{h(t)}) = \delta^k \operatorname{sgn}_Q(g(t))\operatorname{sgn}_Q(h(t)) = \operatorname{sgn}(\delta^k g(t)h(t))$.

Behauptung 9: Ist $Q = \Psi(P_{-\infty})$, so $\tau(X) = -\infty$. Ist $Q = \Psi(P_\infty)$, so $\tau(X) = \infty$. Ist $t \in \mathbb{R}$ und $Q \in \{\Psi(P_{t-}), \Psi(P_{t+})\}$, so $\tau(X) = t$.
Begründung: Dies zeigt man leicht.

(a) Es ist klar, dass höchstens eine der Bedingungen (1)–(5) eintreten kann. Es bleibt zu zeigen, dass mindestens eine dieser Bedingungen eintritt. Hierzu machen wir eine Fallunterscheidung nach $\tau(X)$.

Fall 1: $\tau(X) = -\infty$. In diesem Fall zeigt man leicht (1).

Fall 2: $\tau(X) = \infty$. In diesem Fall zeigt man leicht (2).

Fall 3: $t := \tau(X)$ ist eine über $\mathbb{Q}$ nicht algebraische reelle Zahl. Wir zeigen dann $\Psi^{-1}(\{Q\}) = \{P_{t-}, P_{t+}\}$. Die Inklusion „$\subseteq$“ folgt sofort aus Behauptung 9. Umgekehrt sind $\Psi(P_{t-})$, $\Psi(P_{t+})$ und Q nach Behauptung 9 Anordnungen von $\mathbb{Q}(X)$ bezüglich derer X jeweils den Typ t hat. Nach Behauptung 7 ist damit jede dieser Anordnungen gleich $\{f \in \mathbb{Q}(X) \mid f(t) \geq 0\}$. Insbesondere $\Psi(P_{t-}) = Q = \Psi(P_{t+})$.

Fall 4: $t := \tau(X)$ ist eine über $\mathbb{Q}$ algebraische reelle Zahl mit einem Minimalpolynom $p \in \mathbb{Q}[X]$. Da $\mathbb{Q}$ ein Körper der Charakteristik 0 ist, ist t nur eine einfache Nullstelle von p, weswegen $\operatorname{sgn}_{P_{t-}}(p) \neq \operatorname{sgn}_{P_{t+}}(p)$ gilt. Es muss also einer der beiden folgenden Fälle eintreten:

Fall 4.1: $\delta := \operatorname{sgn}_Q(p) = \operatorname{sgn}_{P_{t-}}(p)$. Wir zeigen dann $\Psi^{-1}(\{Q\}) = \{P_{t-}\}$. Wegen $t = \tau(X)$ und Behauptung 9 gilt $\Psi^{-1}(\{Q\}) \subseteq \{P_{t-}, P_{t+}\}$. Wegen $\delta \neq \operatorname{sgn}_{P_{t+}}(p)$ folgt hieraus „$\subseteq$“. Es bleibt „$\supseteq$“ zu zeigen, das heißt $\Psi(P_{t-}) = Q$. Dies folgt daraus, dass Behauptung 8 für die beiden Anordnungen $\Psi(P_{t-})$ und Q dieselbe explizite Beschreibung liefert.

Fall 4.2: $\operatorname{sgn}_Q(p) = \operatorname{sgn}_{P_{t+}}(p)$. Wir zeigen dann $\Psi^{-1}(\{Q\}) = \{P_{t+}\}$. Dies geht ganz analog zu Fall 4.1.

(b) Es ist klar, dass Q in den Fällen (1) und (2) nicht archimedisch ist. In den Fällen (3) und (4) ist $t := \tau(X)$ nach Behauptung 9 eine über $\mathbb{Q}$ algebraische reelle Zahl, das heißt es gibt ein Polynom $p \in \mathbb{Q}[X] \setminus \{0\}$ mit $p(t) = 0$. Es folgt $\tau(p) \overset{\text{Beh.6}}{=} p(t) = 0$. Wegen $(*)$ gibt es dann kein $r \in \mathbb{Q}$ mit $0 <_Q r <_Q |p|_Q$, obwohl $0 <_Q |p|_Q$. Daher ist Q in diesen Fällen nicht archimedisch. Im Fall (5) ist $t := \tau(X)$ nach Behauptung 9 eine über $\mathbb{Q}$ nicht algebraische reelle Zahl, woraus $\tau(\mathbb{Q}[X] \setminus \{0\}) \subseteq \mathbb{R}^\times$ mit Behauptung 6 und dann $\tau(\mathbb{Q}(X)) \subseteq \mathbb{R}$ mit Behauptung 2 folgt. Letzteres ist wegen $(*)$ gleichbedeutend zur Archimedizität von Q, wie man leicht sieht.