Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Wintersemester 2012/2013

Sebastian Gruler
María López Quijorna
Markus Schweighofer

Übungsblatt 6 zur Reellen Algebraischen Geometrie I

Aufgabe 20. Sei (K,P) ein angeordneter Körper, $R := \overline{(K,P)}$ der reelle Abschluss von (K,P) und $L|K$ eine endliche Körpererweiterung. Sei $a \in L$ mit $L = K(a)$ und bezeichne f das Minimalpolynom von a über K. Zeige, dass

$$\begin{aligned} \{x \in R \mid f(x) = 0\} &\to \{Q \mid Q \text{ Fortsetzung von } P \text{ auf } L\} \\ x &\mapsto \{g(a) \mid g \in K[X], g(x) \in R^2\} \end{aligned}$$

eine Bijektion ist.

Aufgabe 21. (Jacobi-Kriterium) Sei K ein euklidischer Körper, $n \in \mathbb{N}_0$, $(a_{ij})_{1 \le i,j \le n} \in SK^{n \times n}$ und

$$q := \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} X_i X_j \in K[X_1, \ldots, X_n]$$

eine quadratische Form vom Rang r. Für $A_k := (a_{ij})_{1 \le i,j \le k} \in SK^{k \times k}$ gelte $d_k := \det(A_k) \neq 0$ für $k \in \{0, \ldots, r\}$ (beachte $d_0 = 1$). Zeige in Anlehnung an 1.6.1(f), dass es dann $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in K^\times$ und Linearformen $\ell_1, \ldots, \ell_r \in K[X_1, \ldots, X_n]$ mit $q = \sum_{k=1}^{r} \lambda_k \ell_k^2$ gibt, die folgende Bedingungen erfüllen:

(1) $\ell_k \in X_k + K[X_{k+1}, \ldots, X_n]$ für alle $k \in \{1, \ldots, r\}$ und

(2) $\operatorname{sgn}(\lambda_1 \cdots \lambda_k) = \operatorname{sgn}(d_k)$ für alle $k \in \{0, \ldots, r\}$.

Folgere daraus $\operatorname{sg} q = r - 2 \,\#\operatorname{sc}(d_0, \ldots, d_r)$.

Aufgabe 22. Seien R ein reell abgeschlossener Körper, $a, b \in R$ und

$$f := X^3 + aX + b \in R[X].$$

Zeige mit der Hermite-Methode, dass f genau dann drei verschiedene Nullstellen in R hat, wenn

$$\left(\frac{a}{3}\right)^3 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 < 0.$$

Abgabe bis Donnerstag, den 6. Dezember, um 11:44 Uhr in die Zettelkästen neben F411.