Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Wintersemester 2012/2013

Sebastian Gruler
María López Quijorna
Markus Schweighofer

Übungsblatt 12 zur Reellen Algebraischen Geometrie I

Aufgabe 44. Sei (A,T) ein prägeordneter Ring. Zeige, dass jede konstruierbare Teilmenge von $\operatorname{sper}(A,T)$ von der Gestalt

$$\bigcup_{i=1}^{k}\left\{P\in\operatorname{sper}(A,T)\mid \hat a_i(P)=0,\hat b_{i1}(P)>0,\dots,\hat b_{im}(P)>0\right\}$$

mit $k,m\in\mathbb{N}_0$ und $a_i,b_{ij}\in A$ ist.

Aufgabe 45. Sei A ein kommutativer Ring. Für jedes Ideal $I\subseteq A$ definieren wir

$$\sqrt[2]{I}:=\{a\in A\mid \exists s\in\sum A^2: a^2+s\in I\}$$

und induktiv für $k\in\mathbb{N}$

$$\sqrt[2^{k+1}]{I}:=\sqrt[2]{\sqrt[2^k]{I}}.$$

(a) Zeige, dass $\{a\in A\mid a^2\in I\}$ im Allgemeinen kein Ideal von A ist.

(b) Zeige, dass $\sqrt[2]{I}$ ein Ideal ist. Wir nennen es das *Quadratwurzelideal* von I.

(c) Zeige für alle $k\in\mathbb{N}$

$$\sqrt[2^k]{I}=\left\{a\in A\mid \exists s\in\sum A^2: a^{2^k}+s\in I\right\}.$$

(d) Zeige $\operatorname{rrad} I=\cup_{k\in\mathbb{N}}\sqrt[2^k]{I}$.

(e) Zeige, dass es ein $k\in\mathbb{N}$ gibt mit $\operatorname{rrad} I=\sqrt[2^k]{I}$, falls A noethersch ist.

Aufgabe 46. Sei K ein euklidischer Körper, $n\in\mathbb{N}$, I ein Ideal von $K[X_1,\dots,X_n]$,

$$\{X_1^{\alpha_1}\dots X_n^{\alpha_n}\mid \alpha\in\mathbb{N}_0^n\}=\{t_i\mid i\in\mathbb{N}\}\qquad\text{und}\qquad v_k:=\begin{pmatrix}t_1\\ \vdots\\ t_k\end{pmatrix}\text{ für }k\in\mathbb{N}_0.$$

Jede Matrix $W\in K^{k\times m}$ stellt ein Polynom $\operatorname{pol}(W):=v_k^TWv_m$ dar. Zeige

$$\sqrt[2]{I}=\{\operatorname{pol}(W)\mid k,m\in\mathbb{N},\ U\in SK^{m\times m},\ W\in K^{k\times m},\ \operatorname{pol}(U)\in I,\ U-W^TW\text{ psd}\}.$$

Abgabe bis Dienstag, den 5. Februar, um 11:44 Uhr in die Zettelkästen neben F411.