

---

Übungsblatt 2 zur Kommutativen Algebra

---

**Aufgabe 1.** Sei  $R$  ein kommutativer Ring. Ist  $\mathfrak{p} \subseteq R$  ein Primideal, so ist das Komplement  $S := R \setminus \mathfrak{p} \subseteq R$  multiplikativ (im Gegensatz zu  $\mathfrak{p}$ , denn  $1 \notin \mathfrak{p}$ ) und man meint mit Lokalisierung nach  $\mathfrak{p}$  die Lokalisierung nach  $S$ . Sind  $\mathfrak{p} \subseteq R$  ein Primideal,  $M$  und  $N$   $R$ -Moduln und  $f: M \rightarrow N$  ein Homomorphismus, so schreibt man  $R_{\mathfrak{p}} := S^{-1}R$ ,  $M_{\mathfrak{p}} := S^{-1}M$  und  $f_{\mathfrak{p}} := S^{-1}f$  für die Lokalisierungen von  $R$ ,  $M$  und  $f$  nach  $\mathfrak{p}$ . Zeige folgende „Lokal-Global-Prinzipien“:

- (a) Ein Modul ist genau dann der Nullmodul, wenn jede seiner Lokalisierungen nach einem maximalen Ideal der Nullmodul ist.
- (b) Ein Element  $x$  in einem  $R$ -Modul  $M$  ist genau dann null, wenn  $\frac{x}{1}$  in jeder Lokalisierung von  $M$  nach einem maximalen Ideal von  $R$  null ist.
- (c) Ein Homomorphismus  $f$  von  $R$ -Moduln ist genau dann null/injektiv/surjektiv, wenn jede seiner Lokalisierungen nach einem maximalen Ideal von  $R$  null/injektiv/surjektiv ist.

**Aufgabe 2.** Sei  $R$  ein kommutativer Ring. Zeige die Äquivalenz folgender Aussagen:

- (a)  $R$  ist lokal;
- (b)  $R$  besitzt ein maximales Ideal  $\mathfrak{m}$  mit  $1 + \mathfrak{m} \subseteq R^{\times}$ ;
- (c)  $0 \neq 1$  in  $R$  und für alle  $x \in R$  ist  $x \in R^{\times}$  oder  $x + 1 \in R^{\times}$ .

**Aufgabe 3.** Sei  $R$  ein kommutativer Ring mit einem Primideal  $\mathfrak{p}$ . Zeige, dass dann  $R_{\mathfrak{p}}$  ein lokaler Ring mit maximalem Ideal  $\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}$  ist und dass eine kanonische Isomorphie

$$R_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}} \cong \text{qf}(R/\mathfrak{p})$$

besteht.

**Aufgabe 4.** Sei  $X$  ein topologischer Raum,  $x \in X$  und bezeichne  $\mathcal{U}$  die Menge der Umgebungen von  $x$ . Wir betrachten den Ring  $R := \{f: X \rightarrow \mathbb{R} \mid \exists U \in \mathcal{U}: f|_U \text{ stetig}\}$  und darin das Ideal  $I := \{f \in R \mid \exists U \in \mathcal{U}: f|_U = 0\}$ . Zeige, dass  $A := R/I$  lokal ist. Die Elemente von  $A$  heißen *Funktionskeime* in  $x$ .

**Abgabe** bis Dienstag, den 15. Mai, um 11:44 Uhr in die Zettelkästen neben F411 .