Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Sommersemester 2012

Christoph Hanselka
Markus Schweighofer

Übungsblatt 3 zur Kommutativen Algebra

Aufgabe 1. (Inverser Limes) Ein *System von Homomorphismen* abelscher Gruppen ist ein Tripel $S = (I, (X_i)_{i\in I}, (f_{ij})_{i,j\in I, i\prec j})$, wobei

(1) I eine halbgeordnete Menge ist, deren Halbordnung wir mit $\preceq$ notieren,

(2) X_i für jedes $i \in I$ eine abelsche Gruppe ist,

(3) $f_{ij} \colon X_i \to X_j$ für alle $i, j \in I$ mit $i \prec j$ ein Homomorphismus ist und

(4) $f_{jk} \circ f_{ij} = f_{ik}$ für alle $i, j, k \in I$ mit $i \prec j \prec k$ gilt.

Sei $S = (I, (X_i)_{i\in I}, (f_{ij})_{i,j\in I, i\prec j})$ ein System von Homomorphismen abelscher Gruppen. Ist X eine abelsche Gruppe, so nennen wir eine Familie $(g_i)_{i\in I}$ von Homomorphismen $g_i \colon X \to X_i$ $(i \in I)$ mit S *verträglich*, wenn

(5) $f_{ij} \circ g_i = g_j$ für alle $i, j \in I$ mit $i \prec j$.

Ein *inverser Limes* (oft auch *projektiver Limes* genannt) von S ist ein Paar $(X, (\pi_i)_{i\in I})$ bestehend aus einer abelschen Gruppe X und einer mit S verträglichen Familie $(\pi_i)_{i\in I}$ von Homomorphismen (genannt *Projektionen*) $\pi_i \colon X \to X_i$ $(i \in I)$ mit folgender „universellen" Eigenschaft: Für jede abelsche Gruppe Y und jedes mit S verträgliche System $(g_i)_{i\in I}$ von Homomorphismen $g_i \colon Y \to X_i$ $(i \in I)$ gibt es genau einen Homomorphismus $g \colon Y \to X$ mit

(6) $\pi_i \circ g = g_i$ für alle $i \in I$.

Der inverse Limes von S wird mit $\varprojlim S$ bezeichnet oder, wenn S aus dem Kontext klar ist, auch mit $\varprojlim_{i\in I} X_i$.

(a) Zeige, dass der inverse Limes eines Systems abelscher Gruppen durch seine universelle Eigenschaft (im üblichen Sinne) eindeutig bestimmt ist.

(b) Zeige, dass der inverse Limes eines Systems abelscher Gruppen stets existiert.

Hinweis: Wenn die Halbordnung auf I die Identität ist, kann man $\varprojlim_{i\in I} X_i = \prod_{i\in I} X_i$ nehmen und im allgemeinen Fall eine Untergruppe davon.

(c) Bleiben die obigen Aussagen auch für Ringe und R-Moduln (wobei R ein Ring sei) anstelle von abelschen Gruppen richtig?

Aufgabe 2. Sei $I := \mathbb{N}$ geordnet durch $i \preceq j :\iff j \leq i$ $(i, j \in I)$, R ein kommutativer Ring und $f_{ij}\colon R[X]/(X^i) \to R[X]/(X^j)$ der kanonische Homomorphismus für alle $i, j \in I$ mit $i \preceq j$. Den Ring

$$R[[X]] := \varprojlim_{i \in I} R[X]/(X^i) := \varprojlim(I, (R[X]/(X^i))_{i \in I}, (f_{ij})_{i \preceq j})$$

nennt man den Potenzreihenring in einer Variablen X über R. Bezeichne

$$\pi_i\colon R[[X]] \to R[X]/(X^i)$$

für jedes $i \in I$ die zugehörige Projektion.

(a) Sei $(a_i)_{i \in \mathbb{N}_0}$ eine Folge in R. Zeige, dass es genau ein $f \in R[[X]]$ gibt mit

$$\pi_k(f) = \sum_{i=0}^{k-1} a_i \overline{X}^i \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}.$$

Dieses f bezeichnet man mit $\sum_{i=0}^{\infty} a_i X^i$.

(b) Zeige

$$R[[X]] = \left\{ \sum_{i=0}^{\infty} a_i X^i \mid (a_i)_{i \in \mathbb{N}_0} \text{ Folge in } R \right\}.$$

(c) Zeige, dass für alle Folgen $(a_i)_{i \in \mathbb{N}_0}, (b_i)_{i \in \mathbb{N}_0}$ in R gilt:

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i X^i + \sum_{i=0}^{\infty} b_i X^i = \sum_{i=0}^{\infty} (a_i + b_i) X^i \text{ und}$$

$$\left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i X^i \right) \left(\sum_{j=0}^{\infty} b_j X^j \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{i+j=k} a_i b_j \right) X^k.$$

(d) Sei $K := R$ ein Körper. Zeige, dass $K[[X]]$ ein lokaler Ring ist mit maximalem Ideal (X) und Restklassenkörper K.

Aufgabe 3. Sei X ein topologischer Raum und $x \in X$. Wie in Aufgabe 4 auf Blatt 2 seien $R := \{f\colon X \to \mathbb{R} \mid \exists U \in \mathcal{U}\colon f|_U \text{ stetig }\}$, $I := \{f \in R \mid \exists U \in \mathcal{U}\colon f|_U = 0\}$ und $A := R/I$. Zeige, dass $\mathfrak{m} := \{f \in R \mid f(x) = 0\}$ ein maximales Ideal von R ist und dass kanonisch $R_{\mathfrak{m}} \cong A$ gilt. Zeige außerdem, dass man im Fall $(X, x) = (\mathbb{R}, 0)$ den Ring R durch $C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ ersetzen kann.

Abgabe bis Dienstag, den 29. Mai, um 11:44 Uhr in die Zettelkästen neben F411 .