**Universität Konstanz**
**Fachbereich Mathematik und Statistik**
**Sommersemester 2012**

Christoph Hanselka
Markus Schweighofer

---

# Übungsblatt 5 zur Kommutativen Algebra

---

**Aufgabe 1.** Sei $R$ ein kommutativer Ring. Für $I \subseteq R$ definieren wir

$$V(I) := \{\mathfrak{p} \in \operatorname{spec} R \mid I \subseteq \mathfrak{p}\}.$$

(a) Zeige, dass dies die abgeschlossenen Mengen einer Topologie sind, bezüglich welcher $\operatorname{spec} R$ quasikompakt ist. Diese wird *Zariskitopologie* auf $\operatorname{spec} R$ genannt.

(b) Zeige $V(\mathfrak{p}) = \overline{\{\mathfrak{p}\}}$ für $\mathfrak{p} \in \operatorname{spec} R$.

**Aufgabe 2.** Seien $C|K$ eine Körpererweiterung, $C$ algebraisch abgeschlossen, $I$ ein Ideal von $K[X_1, \dots, X_n]$ und $V(I) \subseteq \mathbb{A}^n = C^n$ die zugehörige affine $K$-Varietät. Wir betrachten $A := K[X_1, \dots, X_n]/I$ als Ring und $V(I)$ als topologischen Raum mit der $K$-Zariskitopologie. Beweise die folgende Aussagen:

(a) Man hat eine stetige Abbildung $\varphi\colon V(I) \to \operatorname{spec} A,\ x \mapsto \{f \in A \mid f(x) = 0\}$.

(b) Die offenen Mengen in $V(I)$ sind genau die Urbilder offener Mengen in $\operatorname{spec} A$ unter $\varphi$.

(c) Im Fall $K = C$ ist $\varphi$ injektiv, womit $\varphi$ wegen (b) eine Einbettung topologischer Räume ist.

(d) $\varphi(V(I))$ liegt dicht in $\operatorname{spec} A$.

(e) $\varphi(V(I)) = \{\mathfrak{p} \in \operatorname{spec} A \mid \dim(A/\mathfrak{p}) \leq \operatorname{trdeg}(C|K)\}$

(f) Ist $C|K$ algebraisch, so ist $\varphi(V) = (\operatorname{spec} A)^{\max}$.

(g) Ist $\dim V(I) \leq \operatorname{trdeg}(C|K)$, so ist $\varphi$ surjektiv.

**Abgabe** bis Dienstag, den 26. Juni, um 11:44 Uhr in die Zettelkästen neben F411 .