Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Sommersemester 2012

Sebastian Gruler
María López Quijorna
Markus Schweighofer

Übungsblatt 2 zur Polynomialen Optimierung

Aufgabe 1 (5 Punkte). Sei R ein kommutativer Ring und $A \in R^{t\times t}$. Zeige

$$\det(A + TI_t) = \sum_{i=0}^{t} \Big(\sum_{\substack{I\subseteq\{1,\dots,t\} \\ \#I=t-i}} \det(A_I)\Big) T^i.$$

Aufgabe 2 (5 Punkte). Sei für $n \in \mathbb{N}_0$

$$L_n := \begin{pmatrix} 1 & X_1 & X_2 & \cdots & X_n \\ X_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ X_2 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ X_n & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \in S\mathbb{R}[\underline{X}]^{(n+1)\times(n+1)}.$$

(a) Zeige $\det(L_n) = 1 - \sum_{i=1}^n X_i^2$ durch Induktion nach $n \in \mathbb{N}_0$.

(b) Zeige, dass $B_n := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \le 1\}$ für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ ein Spektraeder ist.

Aufgabe 3 (5 Punkte). Wie im Beweis des Isolationssatzes 2.1.8 sei K ein Kegel im Vektorraum V mit Einheit u, der maximal ist bezüglich der Eigenschaft $-u$ nicht zu enthalten. Für festes $v \in V$ betrachten wir

$$I := \{\lambda \in \mathbb{R} \mid v - \lambda u \in K\} \text{ und } J := \{\mu \in \mathbb{R} \mid v - \mu u \in -K\}.$$

Im Beweis des Isolationssatzes haben wir gesehen, dass $\#(I \cap J) \le 1$. Zeige $\#(I\cap J) = 1$.

Aufgabe 4 (5 Punkte). Wie in Beispiel 2.1.4 aus der Vorlesung betrachten wir den konvexen Kegel

$$K := \{p \in \mathbb{R}[X] \mid \lim_{x\to\infty} p(x) \in \mathbb{R}_{\ge 0} \cup \{\infty\}\}$$

im Vektorraum der Polynome $\mathbb{R}[X]$. Ist K in einem maximalen echten Kegel von $\mathbb{R}[X]$ enthalten?

Aufgabe 5 (4 Punkte). Zeichne mit YALMIP (Kommando `plot`) oder mit der Hand

$$\left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{pmatrix} 1 & x & 0 & x \\ x & 1 & y & 0 \\ 0 & y & 1 & z \\ x & 0 & z & 1 \end{pmatrix} \succeq 0\right\}.$$

Welchem Gegenstand aus dem alltäglichem Leben ähnelt dieser Spektraeder?

Abgabe bis Mittwoch, den 16. Mai 2012, um 12:00 Uhr in die Zettelkästen neben F411.