Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Sommersemester 2012

Sebastian Gruler
María López Quijorna
Markus Schweighofer

Übungsblatt 3 zur Polynomialen Optimierung

Aufgabe 1 (4 Punkte). Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum. Für jede Menge $A \subseteq V$ bezeichnen wir mit $\overline{A}$ den Abschluss und $\mathring{A}$ das Innere von A. Sei $K \subseteq V$ ein Kegel. Zeige, dass dann auch $\overline{K}$ und $\mathring{K} \cup \{0\}$ Kegel sind.

Aufgabe 2 (8 Punkte). Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum. Für jede Menge $A \subseteq V$ bezeichnen wir mit $\partial A := \overline{A} \setminus \mathring{A}$ den Rand von A. Sei $K \subseteq V$ ein Kegel. Eine *Stützhyperebene* von K ist eine Menge der Form $L^{-1}(\{0\})$, wobei $L \in V^* \setminus \{0\}$ mit $K \subseteq L^{-1}(\mathbb{R}_{\geq 0})$.

(a) Zeige, dass eine Menge $H \subseteq V$ genau dann eine Stützhyperebene von K ist, wenn sie der Rand eines K enthaltenden Halbraums ist.

(b) Sei $V \neq \{0\}$. Zeige, dass jedes $v \in \partial K$ auf einer Stützhyperebene von K liegt. Gilt auch die Umkehrung?

Aufgabe 3 (12 Punkte). Welche der folgenden Kegel besitzt eine Einheit? Begründe Deine Aussage!

(a) der Kegel der positiv semidefiniten Matrizen $\mathbb{R}^{t \times t}_{\succeq 0}$ im Vektorraum $S\mathbb{R}^{t \times t}$ aller symmetrischen $t \times t$-Matrizen,

(b) der Kegel $C(\mathbb{R}, \mathbb{R}_{\geq 0})$ der nichtnegativen stetigen Funktionen auf $\mathbb{R}$ im Vektorraum $C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ der stetigen Funktionen auf $\mathbb{R}$,

(c) der Kegel der nichtnegativen Polynomfunktionen in $C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$,

(d) der Kegel der nichtnegativen Polynome im Vektorraum der Polynome $\mathbb{R}[X]$ in einer Variablen,

(e) der Kegel $\sum \mathbb{R}[X]^2 := \{\sum_{i=1}^m p_i^2 \mid m \in \mathbb{N}_0, p_1, \ldots, p_m \in \mathbb{R}[X]\}$ der Quadratsummen in $\mathbb{R}[X]$,

(f) der Kegel $\sum \mathbb{R}[X]^2 + \sum \mathbb{R}[X]^2(1 - X) + \sum \mathbb{R}[X]^2(1 + X)$ bestehend aus allen Polynomen der Form $s_0 + s_1(1 - X) + s_2(1 + X)$ mit $s_0, s_1, s_2 \in \sum \mathbb{R}[X]^2$.

Abgabe bis Donnerstag, den 24. Mai 2012, um 11:44 Uhr in die Zettelkästen neben F411.