Universität Konstanz Sebastian Gruler
Fachbereich Mathematik und Statistik María López Quijorna
Sommersemester 2012 Markus Schweighofer

Übungsblatt 6 zur Polynomialen Optimierung

Aufgabe 1 (16 Punkte). Seien $k, m, n \in \mathbb{N}_0$, $p_1, \dots, p_m \in \mathbb{R}[\underline{X}]_k$ und es habe

$$S := \{x \in \mathbb{R}^n \mid p_1(x) \geq 0, \dots, p_m(x) \geq 0\}$$

nichtleeres Inneres.

(a) Zeige, dass $T_k(p_1, \dots, p_m)$ im Vektorraum $R[\underline{X}]_k$ abgeschlossen ist.

(b) Zeige, dass für alle $f \in \mathbb{R}[\underline{X}]_k$ die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(i) $f \in T_k(p_1, \dots, p_m)$

(ii) Für alle $L \in \mathbb{R}[\underline{X}]_k^*$ mit $L(T_k(p_1, \dots, p_m)) \subseteq \mathbb{R}_{\geq 0}$ und $L(1) = 1$ gilt $L(f) \geq 0$.

Hinweis: Benutze das Lemma von Carathéodory 2.3.1 (vergleiche Bemerkung 3.2.4) und 3.1.5(c), um $T_k(p_1, \dots, p_m)$ als Bild einer quadratisch homogenen Funktion zu schreiben. Zeige mit 2.4.2(a), dass diese Funktion nur 0 auf 0 abbildet, um Lemma 2.4.1 anwenden zu können und (a) zu zeigen. Gehe dann für (b) so vor wie im zweiten Teil des Beweises von 2.4.3 beziehungsweise 2.3.9.

Aufgabe 2 (8 Punkte). Seien $n, m \in \mathbb{N}_0, \ell \in \mathbb{R}[\underline{X}]_1, t_1, \dots, t_m \in \mathbb{N}_0$ und $L_1 \in S\mathbb{R}[\underline{X}]_1^{t_1 \times t_1}, \dots, L_m \in S\mathbb{R}[\underline{X}]^{t_m \times t_m}$. Zeige, dass das zu dem SDP

$$(P) \qquad \text{minimiere } \ell(x) \text{ über } x \in \mathbb{R}^n \text{ mit } L_1(x) \succeq 0, \dots, L_m(x) \succeq 0$$

duale SDP geschrieben werden kann als

$$(D) \qquad \text{maximiere } \mu \text{ über } \mu \in \mathbb{R}, A_1 \in \mathbb{R}^{t_1 \times t_1}, \dots, A_m \in \mathbb{R}^{t_m \times t_m}$$
$$\text{mit } \ell = \mu + \sum_{i=1}^{m} \operatorname{tr}(A_i L_i) \text{ und } A_1 \succeq 0, \dots, A_m \succeq 0.$$

Abgabe bis Donnerstag, den 12. Juli 2012, um 11:44 Uhr in die Zettelkästen neben F411.