

---

Übungsblatt 3 zur Linearen Algebra I

---

**Aufgabe 1:** Welche der folgenden Relationen sind reflexiv/symmetrisch/transitiv? Welche sind Äquivalenzrelationen?

- (a) die Relation  $|$  auf  $\mathbb{N}$  definiert durch  $a | b : \iff a$  teilt  $b$  ( $a, b \in \mathbb{N}$ )
- (b)  $\equiv_\infty$  auf  $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$  definiert durch  $f \equiv_\infty g : \iff \exists m \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{Z}_{>m} : f(n) = g(n)$
- (c)  $R$  auf der Menge der (derzeit lebenden) Menschen, wobei  $xRy$  für Menschen  $x$  und  $y$  genau dann gelte, wenn  $x$  und  $y$  miteinander blutsverwandt sind
- (d)  $\sim$  auf der Menge der Dreiecke (in der Ebene), wobei  $\Delta_1 \sim \Delta_2$  für Dreiecke  $\Delta_1$  und  $\Delta_2$  genau dann gelte, wenn  $\Delta_1$  und  $\Delta_2$  kongruent (das heißt deckungsgleich) sind

**Aufgabe 2:** Bezeichne  $\mathcal{R}$  die Menge aller Relationen auf  $\mathbb{N}$  und seien drei Funktionen  $R, T, S: \mathcal{R} \rightarrow \{0, 1\}$  definiert durch

$$\begin{aligned} R(\sim) = 1 &\iff \sim \text{ ist reflexiv,} \\ T(\sim) = 1 &\iff \sim \text{ ist transitiv,} \\ S(\sim) = 1 &\iff \sim \text{ ist symmetrisch.} \end{aligned}$$

Zeige, dass  $\mathcal{R} \rightarrow \{0, 1\}^3$ ,  $\sim \mapsto (R(\sim), T(\sim), S(\sim))$  surjektiv ist.

**Aufgabe 3:** Sei  $A$  eine Menge.

- (a) Zeige, dass jeder Schnitt von Äquivalenzrelationen auf  $A$  wieder eine Äquivalenzrelation auf  $A$  ist, das heißt: Ist  $\mathcal{E}$  eine Menge von Äquivalenzrelationen auf  $A$ , so ist  $\bigcap \mathcal{E}$  wieder eine Äquivalenzrelation auf  $A$ , wobei man  $\bigcap \emptyset := A \times A$  setze.
- (b) Zeige, dass für jede Relation  $\rightarrow$  auf  $A$  durch

$$a \leftrightarrow b : \iff (a \rightarrow b \text{ oder } b \rightarrow a)$$

$(a, b \in A)$  eine symmetrische Relation auf  $A$  und durch

$$a \sim b : \iff \exists n \in \mathbb{N}_0 : \exists a_0, \dots, a_n \in A : (a = a_0 \leftrightarrow a_1 \leftrightarrow a_2 \cdots \leftrightarrow a_n = b)$$

$(a, b \in A)$  eine Äquivalenzrelation auf  $A$  definiert wird.

- (c) Zeige, dass es zu jeder Relation  $R$  auf  $A$  eine *kleinste* Äquivalenzrelation  $\sim$  auf  $A$  mit  $R \subseteq \sim$  gibt (das heißt  $R \subseteq \sim \in \mathcal{E}$  und  $\sim \subseteq E$  für jede alle  $E \in \mathcal{E}$  mit  $\sim \subseteq E$ ).

**Aufgabe 4:** Sei  $A$  eine Menge und  $n \in \mathbb{N}$ .

(a) Begründe, warum es eine kleinste Äquivalenzrelation  $\sim$  auf  $A^n$  gibt mit

$$(a_1, a_2, \dots, a_n) \sim (a_2, \dots, a_n, a_1)$$

für alle  $a_1, \dots, a_n \in A$ .

(b) Begründe, warum es eine kleinste Äquivalenzrelation  $\approx$  auf  $A^n$  gibt mit

$$(a_1, a_2, \dots, a_n) \approx (a_2, \dots, a_n, a_1) \quad \text{und} \quad (a_1, a_2, \dots, a_n) \approx (a_n, \dots, a_2, a_1)$$

für alle  $a_1, \dots, a_n \in A$ .

(c) Begründe, warum man die Elemente der Quotientenmenge  $A^n/\sim$  *getragene Halsketten* der Länge  $n$  über  $A$  nennt.

(d) Begründe, warum man die Elemente der Quotientenmenge  $A^n/\approx$  *ungetragene Halsketten* der Länge  $n$  über  $A$  nennt.

(e) Bestimme jeweils die Anzahl der getragenen und ungetragenen Halsketten der Länge 6 über einer zweielementigen Menge.

**Zusatzaufgabe für Interessierte:** Finde ein Beispiel für eine Menge  $G$  und eine Funktion  $+: G \times G \rightarrow G$  so, dass  $+$  auf  $G$  nicht assoziativ ist, aber die drei anderen Axiome abelscher Gruppen erfüllt.

Bei jeder Aufgabe sind bis zu 10 Punkte zu erreichen. Abgabe bis Dienstag, den 12. November 2013, um 9:55 Uhr in das Postfach Ihres Tutors in der 4. Etage des F-Gebäudes.