Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Wintersemester 2013/2014

Merlin Carl
Markus Schweighofer

Übungsblatt 9 zur Linearen Algebra I

Auf dem ganzen Blatt gilt: Auf Matrizen durchgeführte Zeilenoperationen sind stets explizit anzugeben.Für Aufgabe 5 gibt es 20 Punkte, für jede andere Aufgabe 10 Punkte. Der Pflichtteil besteht aus den Aufgaben 1 bis 5, mit den Aufgaben 6 und 7 sowie der Zusatzaufgabe könnt ihr Zusatzpunkte sammeln.

Aufgabe 1: Führe die folgenden beiden Matrizen durch Zeilenumformungen ineinander über oder zeige, dass das unmöglich ist.

$$A := \begin{pmatrix} -1 & -3 & 0 & 1 \\ -3 & -1 & -4 & 1 \\ 1 & 4 & 7 & 1 \\ 0 & -3 & -1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}, \qquad B := \begin{pmatrix} 0 & -5 & -5 & -1 \\ 0 & 2 & 4 & 1 \\ 3 & -2 & 3 & -1 \\ 4 & 3 & 7 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}.$$

Aufgabe 2: Betrachte

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 0 \\ 2 & 4 & 1 & 10 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{5\times 5}.$$

(a) Bringe A in reduzierte Stufenform.

(b) Bestimme eine Basis des Zeilenraums von A.

(c) Bestimmen eine Basis des Kerns von A.

Aufgabe 3: Finde jeweils ein homogenes lineares Gleichungssystem mit der angegebenen Menge als Lösungsmenge.

(a) $\operatorname{span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \subseteq \mathbb{R}^4$

(b) $\operatorname{span}\left(\begin{pmatrix} \overline{6} \\ \overline{2} \\ \overline{5} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \overline{3} \\ \overline{1} \\ \overline{6} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \overline{5} \\ \overline{4} \\ \overline{3} \end{pmatrix}\right) \subseteq \mathbb{F}_7^3$

Aufgabe 4: Es seien A und B zwei Matrizen über einem Körper K mit jeweils n Spalten. Zeige:

(a) $\ker(A) \subseteq \ker(B) \iff \operatorname{row}(A) \supseteq \operatorname{row}(B)$

(b) $\ker(A) \subseteq \operatorname{row}(B) \iff \operatorname{row}(A) \supseteq \ker(B)$

(c) $\operatorname{row}(A) \subseteq \ker(B) \iff \ker(A) \supseteq \operatorname{row}(B)$

Aufgabe 5: Betrachte den Unterring $\mathbb{Z}[\mathring{\imath}]$ der *ganzen Gaußschen Zahlen* von $\mathbb{C}$. Wir betrachten ein Gleichungssystem

$$(*) \qquad Ax = 0 \qquad (x \in \mathbb{C}^n)$$

mit $A \in \mathbb{Z}[\mathring{\imath}]^{m \times n}$.

(a) Zeige $\mathbb{Z}[\mathring{\imath}] = \{a + b\mathring{\imath} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$

(b) Zeige, dass $\varphi\colon \mathbb{Z}[\mathring{\imath}] \to \mathbb{F}_9,\ a + b\mathring{\imath} \mapsto \overline{a}^{(3)} + \overline{b}^{(3)}\mathring{\imath}$ ein Homomorphismus ist.

(c) Zeige: Wenn $(*)$ eine Lösung $x \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ hat, dann hat $(*)$ auch eine Lösung $x \in \mathbb{Q}[\mathring{\imath}]^n \setminus \{0\}$.

(d) Zeige: Wenn $(*)$ eine Lösung $x \in \mathbb{Q}[\mathring{\imath}]^n \setminus \{0\}$ hat, dann hat $(*)$ auch eine Lösung $x \in \mathbb{Z}[\mathring{\imath}]^n \setminus \{0\}$.

(e) Zeige: Wenn $(*)$ eine Lösung $x \in \mathbb{Z}[\mathring{\imath}]^n \setminus \{0\}$ hat, dann hat das Gleichungssystem, welches aus $(*)$ durch Anwenden von φ auf alle seine Koeffizienten entsteht, eine Lösung $x \in \mathbb{F}_9^n \setminus \{0\}$.

(f) Bestimme die Lösungsmenge von $(*)$ für

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1+\mathring{\imath} & 1-\mathring{\imath} & 1 & \mathring{\imath} & 1+\mathring{\imath} & -1+\mathring{\imath} \\ -1+\mathring{\imath} & 1 & 1+\mathring{\imath} & 1-\mathring{\imath} & 1 & \mathring{\imath} & 1+\mathring{\imath} \\ 1+\mathring{\imath} & -1+\mathring{\imath} & 1 & 1+\mathring{\imath} & 1-\mathring{\imath} & 1 & \mathring{\imath} \\ \mathring{\imath} & 1+\mathring{\imath} & -1+\mathring{\imath} & 1 & 1+\mathring{\imath} & 1-\mathring{\imath} & 1 \\ 1 & \mathring{\imath} & 1+\mathring{\imath} & -1+\mathring{\imath} & 1 & 1+\mathring{\imath} & 1-\mathring{\imath} \\ 1-\mathring{\imath} & 1 & \mathring{\imath} & 1+\mathring{\imath} & -1+\mathring{\imath} & 1 & 1+\mathring{\imath} \\ 1+\mathring{\imath} & 1-\mathring{\imath} & 1 & \mathring{\imath} & 1+\mathring{\imath} & -1+\mathring{\imath} & 1 \end{pmatrix}$$

(g) Bestimme eine Matrix $B \in \mathbb{C}^{m \times n}$ in reduzierter Stufenform mit $A \sim B$.

Aufgabe 6: Seien $p \in \mathbb{P}$, $Q := \{c^2 \mid c \in \mathbb{F}_p^\times\}$ und $a, b \in \mathbb{F}_p^\times \setminus Q$. Zeige:

(a) Q ist eine Untergruppe von $\mathbb{F}_p^\times$.

(b) $\varphi\colon \mathbb{F}_p^\times \to Q,\ c \mapsto c^2$ ist ein Gruppenepimorphismus.

(c) $\#\ker\varphi \leq 2$

(d) $\#(\mathbb{F}_p^\times / Q) \leq 2$

(e) $\frac{a}{b} \in Q$

(f) $\mathbb{F}_p[X]/(X^2 - a) \cong \mathbb{F}_p[X]/(X^2 - b)$

Aufgabe 7: Seien G und H abelsche Gruppen mit $\#G = \#H \in \mathbb{P}$. Zeige $G \cong H$.

Zusatzaufgabe für Interessierte: Seien $p \in \mathbb{P}$ und $a, b \in \mathbb{N}$ mit $\frac{a}{b} = \sum_{k=1}^{p-1} \frac{1}{k}$. Zeige:

(a) Es ist p ein Teiler von a, falls $p \neq 2$.

(b) Es ist p^2 ein Teiler von a, falls $p \notin \{2, 3\}$.

Hinweis: Zeige $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ durch Induktion nach $n \in \mathbb{N}$ und verwende für Teil (b) dieses Ergebnis geschickt.

Abgabe bis Dienstag, den 7. Januar 2013, um 9:55 Uhr in das Postfach Ihres Tutors in der 4. Etage des F-Gebäudes.