Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Wintersemester 2013/2014

Merlin Carl
Markus Schweighofer

# Übungsblatt 11 zur Linearen Algebra I

**Aufgabe 1**:

(a) Bestimme für $K \in \{\mathbb{Q}, \mathbb{F}_2\}$,

$$A := \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -3 & 0 \\ 5 & 2 & 6 & 1 \end{pmatrix} \in K^{4\times 4}, \quad b_1 := \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \in K^4, \quad b_2 := \begin{pmatrix} 8 \\ 11 \\ -12 \\ 31 \end{pmatrix} \in K^4$$

und $i \in \{1,2\}$ jeweils die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems

$$Ax = b_i \qquad (x \in K^4).$$

(b) Finde für alle $a, b, c \in \mathbb{R}$ die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 3 \\ 8 & 7 & -1 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 22a^2 - 18b + c^3 \\ 2a + 2b - 6b^2 \\ 2a - 2ac + 2ab \end{pmatrix} \qquad (x \in \mathbb{R}^3).$$

**Aufgabe 2**: Berechnen Sie die Inversen der folgenden Matrizen:

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{F}_2^{2\times 2}$

(b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{F}_{13}^{3\times 3}$

(c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 \\ -3 & -2 & 7 & 1 \\ 2 & 7 & 2 & 3 \\ -4 & -6 & 6 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{4\times 4}$

**Aufgabe 3**: Seien $K$ ein Körper, $V$ und $W$ seien $K$-Vektorräume und $U$ ein Unterraum von $V$. Zeige:

(a) $L := \{f \in \operatorname{Hom}(V, W) \mid U \subseteq \ker(f)\}$ ist ein Untervektorraum von $\operatorname{Hom}(V, W)$.

(b) $\operatorname{Hom}(V/U, W) \to L,\ f \mapsto f \circ \pi$ ist ein Vektorraumisomorphismus, wobei $\pi\colon V \to V/U,\ v \mapsto \overline{v}$ den kanonischen Epimorphismus bezeichne.

**Aufgabe 4**: Die Fibonaccifolge $(F_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ist wie auf Blatt 7 rekursiv definiert durch $F_0 := 0$, $F_1 := 1$ und $F_{n+2} := F_{n+1} + F_n$ für $n \in \mathbb{N}_0$. Ferner sind für $m \times m$-Matrizen $A$ über einem kommutativen Ring die Potenzen $A^k$ $(k \in \mathbb{N}_0)$ rekursiv definiert durch $A^0 := I_m$ und $A^{k+1} := A^k A$ für $k \in \mathbb{N}_0$.

(a) Zeige, dass für $A := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ gilt $A^n = \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix}$ für $n \in \mathbb{N}$.

(b) Drücke $F_{1+m+n}$ für alle $m, n \in \mathbb{N}$ explizit durch $F_m, F_n, F_{m+1}, F_{n+1}$ aus.

(c) Berechne die Potenzen $B^4$, $B^{32}$ und $B^{36}$ von $B := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{F}_{17}^{2\times 2}$.

(d) Bestimme $\ell \in \mathbb{N}$ mit $F_{n+\ell} \equiv_{(17)} F_n$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$

(e) Berechne den Rest von $F_{827378912}$ bei Division durch 17.

**Zusatzaufgabe für Interessierte**: Seien $K$ ein Körper, $n \in \mathbb{N}$ und $M, N \in K^{n\times n}$ mit $MN + M + N = 0$. Zeige: $MN = NM$.

Bei jeder Aufgabe sind bis zu 10 Punkte zu erreichen. Abgabe bis Dienstag, den 21. Januar 2014, um 9:55 Uhr in das Postfach Ihres Tutors in der 4. Etage des F-Gebäudes.