NACHKLAUSUR ZUR LINEAREN ALGEBRA 1

Universität Konstanz Fachbereich Mathematik und Statistik
Merlin Carl, Salma Kuhlmann, Markus Schweighofer

9. September 2014

Familienname:

Vorname:

Matrikelnummer:

Aufgabe	1	2	3	4	5	$\sum$
erreichte Punktzahl						
Korrektor (Initialen)						
Maximalpunktzahl	10	20	20	20	30	100

Fasse den Klausurbogen nicht an, bevor die Klausur eröffnet wird!

Entferne nicht die Klammerung der Blätter. Sobald die Klausur eröffnet wird, trage auf **jeder Vorderseite sofort** Deinen Namen ein. Schreibe die Lösung zu einer Aufgabe nur auf die dafür vorgesehenen Blätter. Wenn Du noch genug Zeit hast, empfiehlt es sich, die Lösung zunächst auf Schmierpapier zu schreiben. Vergiss aber nicht, die Lösung rechtzeitig auf den Klausurbogen zu übertragen.

Zögere bei Fragen nicht, Dich (möglichst lautlos) bemerkbar zu machen.

Die maximale Bearbeitungszeit beträgt 120 Minuten. Die einzigen erlaubten Hilfsmittel sind ein "Spickzettel"[1], Schreibzeug, Schmierpapier[2] und eine Uhr[3]. Viel Erfolg!

[1] ein beidseitig von eigener Hand beschriebenes Blatt im Format A4
[2] anfangs unbeschrieben
[3] ohne eingebaute Kommunikationsgeräte

Name: **Seite 1 zur Aufgabe 1**

erreichte Punktzahl: **Korrektor (Initialen):**

Aufgabe 1 (10 Punkte). Schreibe für die folgenden 10 Multiple-Choice-Fragen jeweils die Nummer aller richtigen Antworten unter die jeweilige Frage. Pro Frage sind 2 Punkte zu erreichen. Diese gibt es, wenn genau die richtigen Antworten angegeben sind. Ist nicht jede richtige Antwort, aber mindestens eine und keine falsche Antwort angegeben, so gibt es 1 Punkt. Ist keine oder eine falsche Antwort angegeben, so gibt es 0 Punkte.

(a) Welche Aussagen gelten für alle $f \in (\mathbb{N}^{\mathbb{N}})^{\mathbb{N}}$ bzw. für $g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}^{\mathbb{N}},\ n \mapsto (k \mapsto k^n)$?

(1) Für alle $n \in \mathbb{N}$ liegt n im Definitionsbereich von $f(n)$.

(2) $(g(3))(2) = 8$

(3) Die Funktion $\mathbb{N} \to \mathbb{N},\ n \mapsto (f(n))(n) + 1$ liegt nicht im Bild von f.

(4) Für alle $m, n \in \mathbb{N}$ ist $(g(m))(n) = (g(n))(m)$.

Richtige Antworten:

(b) Welche Aussagen gelten für jede abelsche Gruppe $(G, +)$, wobei $nx := \overbrace{x + ... + x}^{n\text{-mal}}$ für $n \in \mathbb{N}$ und $x \in G$?

(1) $\exists a, b \in G : a + b \neq a$

(2) $\exists n \in \mathbb{N} : \forall a, b \in G : b + (na) = b$

(3) $\forall n \in \mathbb{N} : \exists a, b \in G : b + (na) = b$

(4) Es existiert höchstens ein $a \in G$, welches $\forall b \in G : a + b = b$ erfüllt.

Richtige Antworten:

(c) Welche Aussagen gelten für alle endlichdimensionalen Vektorräume V und linearen Abbildungen $f\colon V \to V$?

(1) $\mathrm{im}(f) = V$

(2) Es existiert eine lineare Abbildung $g : V \to V$ mit $\ker(g) = \mathrm{im}(f)$.

(3) $\ker(f) + \mathrm{im}(f) = V$

(4) $\dim(\ker(f)) + \dim(\mathrm{im}(f)) = \dim V$

Richtige Antworten:

Seite 2 zur Aufgabe 1

(d) Welche Aussagen stimmen für jeden Körper K, jedes $n \in \mathbb{N}$ und jede Matrix $A \in K^{n\times n}$?

(1) Ist $\det(A) \neq 0$, so ist A diagonalisierbar.

(2) Ist $\det(A) = 0$, so ist A nicht diagonalisierbar.

(3) Ist $A^{123} = 0$, so ist $\det(A) = 0$.

(4) Ist $\det(A) \neq 0$, so ist A invertierbar.

Richtige Antworten:

(e) Welche Aussagen gelten für alle Körper K und alle Matrizen $A \in K^{n\times n}$ (es bezeichne χ_A das charakteristische Polynom und und μ_A das Minimalpolynom von A)?

(1) $\deg(\chi_A) > \deg(\mu_A)$

(2) χ_A liegt in dem von μ_A in $K[X]$ erzeugten Ideal, das heißt $\chi_A \in (\mu_A)$.

(3) Ist $\chi_A = \mu_A$, so ist A diagonalisierbar.

(4) Ist $\chi_A(A) = 0$, so ist A nicht invertierbar.

Richtige Antworten:

Name: **Seite 1 zur Aufgabe 2**

erreichte Punktzahl: **Korrektor (Initialen):**

Aufgabe 2 (20 Punkte).
(a) Bestimme die Lösungsmenge des folgenden Gleichungssystems über $\mathbb{F}_{11}$ (wie üblich seien $2 := 1+1,\ 3 := 1+1+1, \ldots \in \mathbb{F}_{11}$)

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad (x \in \mathbb{F}_{11}^4)$$

(10 Punkte)
(b) Zeige: Ist V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum und sind U, W Unterräume von V mit $\dim(U) + \dim(W) = \dim(V)$ und $U \cap W = \{0\}$, so ist $\operatorname{span}(U \cup W) = V$.
(10 Punkte)

Lösung zur Aufgabe 2:

Seite 2 zur Aufgabe 2

Fortsetzung der Lösung zu Aufgabe 2:

Name: **Seite 3 zur Aufgabe 2**

erreichte Punktzahl: **Korrektor (Initialen):**

Fortsetzung der Lösung zu Aufgabe 2:

Name: **Seite 1 zur Aufgabe 3**

erreichte Punktzahl: **Korrektor (Initialen):**

Aufgabe 3 (20 **Punkte).**
(a) Berechne die Determinante der Matrix $A_n := (i+j-1)_{1\leq i,j\leq n} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ in Abhängigkeit von $n \in \mathbb{N}$. (8 Punkte)
(b) Es seien $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $A + \mathring{i}B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ invertierbar, wobei $\mathring{i} \in \mathbb{C}$ die imaginäre Einheit bezeichne. Zeige: Es existiert eine reelle Zahl λ so, dass $A + \lambda B$ invertierbar ist. (12 Punkte)

Lösung zur Aufgabe 3:

Fortsetzung der Lösung zu Aufgabe 3:

Name: **Seite 1 zur Aufgabe 4**

erreichte Punktzahl: **Korrektor (Initialen):**

Aufgabe 4 (20 Punkte).
(a) Untersuche die beiden Matrizen

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & -4 & 4 \\ -5 & -2 & 5 \\ -5 & -4 & 7 \end{pmatrix} \in \mathbb{F}_{17}^{3\times 3}$$

jeweils auf Diagonalisierbarkeit. Hierbei sei wie üblich $2 := 1+1,\ 3 := 1+1+1, \ldots \in \mathbb{F}_{17}$.
(10 Punkte)

(b) Es sei K ein Körper und $0 \neq A \in K^{n\times n}$ nilpotent, das heißt $A^m = 0$ für ein $m \in \mathbb{N}$.
Zeige: A ist nicht diagonalisierbar. (10 Punkte)

Lösung zur Aufgabe 4:

Seite 2 zur Aufgabe 4

Fortsetzung der Lösung zu Aufgabe 4:

Name: **Seite 3 zur Aufgabe 4**

erreichte Punktzahl: **Korrektor (Initialen):**

Fortsetzung der Lösung zu Aufgabe 4:

Name: **Seite 1 zur Aufgabe 5**

erreichte Punktzahl: **Korrektor (Initialen):**

Aufgabe 5 (30 **Punkte).**
Welche der folgenden Aussagen gelten für jeden Vektorraum V und für alle Unterräume U und W von V (jeweils Beweis oder Gegenbeispiel)?
(a) $V = U \oplus W \implies U \cong V/W$ (5 Punkte)
(b) $U \cong V/W \implies V = U \oplus W$ (5 Punkte)
(c) $\dim V < \infty \implies V/(U + W) \cong (V/U)/((U + W)/U)$ (10 Punkte)
(d) $\dim V = \infty \implies V/(U + W) \cong (V/U)/((U + W)/U)$ (10 Punkte)

Lösung zur Aufgabe 5:

Seite 2 zur Aufgabe 5

Fortsetzung der Lösung zu Aufgabe 5:

Name: **Seite 3 zur Aufgabe 5**

erreichte Punktzahl: **Korrektor (Initialen):**

Fortsetzung der Lösung zu Aufgabe 5: