Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Wintersemester 2013/2014

Merlin Carl
Markus Schweighofer

Probeklausur zur Linearen Algebra I

Bearbeite die folgenden Aufgaben selbstständig und ohne die Verwendung von Hilfsmitteln außer Schreibzeug und Papier. Schreibe deine Antworten leserlich auf dein Arbeitspapier. Nummeriere die Seiten deiner Bearbeitung und schreibe auf jedes Blatt deinen Namen sowie den Namen deines Tutors. Statt eines Namens kannst du auch ein Pseudonym verwenden.

Aufgabe 1
In den folgenden zehn Multiple-Choice-Fragen ist jeweils anzugeben, welche der Aussagen wahr sind. Schreibe dazu die Buchstaben der richtigen Antworten (also der wahren Aussagen) auf dein Arbeitspapier. Wenn mehrere Antworten zutreffen, so gib alle an. Pro Frage sind eineinhalb Punkte zu erreichen. Die volle Punktzahl für eine Frage gibt es, wenn genau die wahren Aussagen angegeben sind. Fehlt eine richtige Antwort und ist zugleich mindestens eine richtige, aber keine falsche Antwort angegeben, so gibt es einen Punkt. Ist keine Antwort gewählt oder eine falsche Antwort als richtig angegeben, so gibt es keinen Punkt.

(I) Für alle Funktionen $f : A \to B$ und $g : B \to C$ gilt:
(a) Ist g nicht surjektiv, so ist auch $g \circ f$ nicht surjektiv.
(b) Sind f und g injektiv, so auch $g \circ f$.
(c) Existiert die Umkehrfunktion $(g \circ f)^{-1}$, so sind f und g bijektiv.
(d) Ist f surjektiv und g injektiv, so ist $g \circ f$ injektiv.

(II) Betrachte die Funktion $F : \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \times \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, $(f, g) \mapsto f \circ g$, ferner die Menge B der bijektiven Elemente von $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.
(a) F ist surjektiv.
(b) F ist injektiv.
(c) $F(B \times B) = B$
(d) Das Bild der Menge $\{(g, g^{-1}) \mid g \in B\}$ unter F hat unendlich viele Elemente.

(III) Für jede abelsche Gruppe $(G, +)$ gilt:
(a) $\forall x \in G : \exists y \in G : x + y = 0$
(b) $\exists x \in G : \forall y \in G : x + y = 0$
(c) $\forall x \in G : x + x = 0$
(d) $\exists x \in G : x + x \neq 0$

(IV) Für alle abelschen Gruppen G und alle Untergruppen H von G...
(a) ist $0_G = 0_H$.
(b) ist $\#H$ ein Teiler von $\#G$, falls G endlich ist.
(c) existiert eine Untergruppe H' von G so, dass $G \cong H \times H'$.
(d) ist durch $a \equiv b :\Leftrightarrow a - b \in H$ eine Kongruenzrelation $\equiv$ auf G definiert.

(V) Für jede abelsche Gruppe $(G, +)$ gilt:
(a) Jede Äquivalenzrelation auf G ist eine Kongruenzrelation auf $(G, +)$.
(b) Jede Kongruenzrelation auf $(G, +)$ ist eine Äquivalenzrelation auf G.
(c) Hat G mindestens 3 Elemente, so gibt es mehr Äquivalenzrelationen auf G als Untergruppen von $(G, +)$.
(d) Ist $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf G, so ist $\widetilde{0}$ eine Untergruppe von G.

(VI)
(a) Jeder kommutative Ring...
(b) Jeder Körper...
(c) Jede abelsche Suppe...
(d) Jede abelsche Gruppe...
hat mindestens zwei Elemente.

(VII) Für jedes Polynom $p \in \mathbb{R}[X]$ mit positivem Grad...
(a) hat p eine Nullstelle in $\mathbb{Q}$.
(b) hat p eine Nullstelle in $\mathbb{R}$.
(c) hat p eine Nullstelle in $\mathbb{C}$.
(d) hat p genau dann eine Nullstelle in $\mathbb{C}$, wenn p vom Grad 2 ist.

(VIII) Für jeden Körper K und jedes Polynom $p \in K[X]$ ist...
(a) $K[X]$ ein Körper.
(b) $K[X]$ ein kommutativer Ring.
(c) $K[X]/(p)$ ein Körper.
(d) $K[X]/(p)$ ein Körper, falls p vom Grad 1 ist.

(IX) Für jeden Körper K...
(a) wird jede Polynomfunktion von K nach K durch ein Polynom aus $K[X]$ dargestellt.
(b) stellt jedes Polynom aus $K[X]$ eine Polynomfunktion von K nach K dar.
(c) stellen je zwei verschiedene Polynome aus $K[X]$ verschiedene Polynomfunktionen von K nach K dar.
(d) gibt es eine bijektive Polynomfunktion von K nach K.

(X) Der Körper $\mathbb{F}_{49}$...
(a) ist isomorph als kommutativer Ring zu $\mathbb{F}_7$.
(b) ist ein Oberring von $\mathbb{F}_7$.
(c) hat unendlich viele Elemente.
(d) ist isomorph zum kommutativen Ring $\mathbb{F}_7[X]/(X^2 + 1)$.

Aufgabe 2:

(a) Definiere den Begriff der Kongruenzrelation auf einer abelschen Gruppe G. (2 Punkte)

(b) Bestimme den Rest von 8191827^{4321} bei Divison durch 9. (3 Punkte)

(c) Es sei G eine abelsche Gruppe. Zeige, dass $f_a : G \to G$, $x \mapsto x + a$ für alle $a \in G$ eine Bijektion ist. Finde alle $a \in G$, für die f_a sogar ein Automorphismus ist. (4 Punkte)

(d) Für $f, g \in \mathbb{Z}^{\mathbb{Z}}$ sei $f \sim g$ genau dann, wenn $\{z \in \mathbb{Z} \mid f(z) \neq g(z)\}$ endlich ist. Zeige, dass $\sim$ eine Kongruenzrelation auf der abelschen Gruppe $(\mathbb{Z}^{\mathbb{Z}}, +)$ ist und bestimme $\widetilde{0}$. (4 Punkte)

Aufgabe 3:

(a) Bestimme die Lösungsmenge des folgenden Gleichungssystems über $\mathbb{F}_{13}$ (4 Punkte):

$$\begin{aligned} x + y + \overline{2}z &= 0 \\ x + \overline{2}y + \overline{3}z &= 0 \\ x + \overline{3}y + \overline{4}z &= 0 \end{aligned} \qquad\qquad (x, y, z \in \mathbb{F}_{13})$$

(b) Bestimme alle Nullstellen des Polynoms $2X^5 + X^4 + 2X + 1$ in $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}[i]$ und $\mathbb{F}_{49}$. (4 Punkte)

Aufgabe 4:

(a) Formuliere den Homomorphiesatz für kommutative Ringe. (2 Punkte)

(b) Finde ein Polynom von minimalem Grad in $\mathbb{F}_7[X]$, das die gleiche Polynomfunktion wie $\bar{6}X^7 - \bar{7}X^3 + X + \overline{14} \in \mathbb{F}_7[X]$ darstellt. (2 Punkte)

(c) Finde unendlich viele $n \in \mathbb{N}$ derart, dass ein $x \in \mathbb{Z}/(n)$ existiert mit $x^3 = \bar{4}$. (4 Punkte)

(d) Es sei K ein endlicher Körper mit $1 + 1 \neq 0$. Zeige

$$\sum_{x \in K^\times} x^{-1} = 0.$$

(6 Punkte)

Viel Erfolg!