Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Sommersemester 2013

Sebastian Gruler
María López Quijorna
Markus Schweighofer

Übungsblatt 15 zur Reellen Algebraischen Geometrie

Aufgabe 54. Sei I eine Menge, $(K_i, \leq_i)_{i\in I}$ eine Familie von angeordneten Körpern und $\mathscr{U}$ ein Ultrafilter auf I.

(a) Zeige, dass

$$\mathfrak{m} := \{(a_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} K_i \mid \{i \in I \mid a_i = 0\} \in \mathscr{U}\}$$

ein maximales Ideal des Ringes $\prod_{i\in I} K_i$ ist, so dass

$$\prod_{i\in I} K_i \Big/ \mathscr{U} := \prod_{i\in I} K_i \Big/ \mathfrak{m}$$

ein Körper ist.

(b) Zeige, dass durch

$$\overline{(a_i)_{i\in I}}^{\mathfrak{m}} \leq \overline{(b_i)_{i\in I}}^{\mathfrak{m}} :\iff \{i \in I \mid a_i \leq b_i\} \in \mathscr{U} \qquad \left((a_i)_{i\in I}, (b_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} K_i\right)$$

eine Anordnung $\leq$ auf $\prod_{i\in I} K_i \Big/ \mathscr{U}$ definiert wird, so dass

$$\prod_{i\in I} (K_i, \leq_i) \Big/ \mathscr{U} := \left(\prod_{i\in I} K_i \Big/ \mathfrak{m}, \leq\right)$$

ein angeordneter Körper ist, den wir das *Ultraprodukt* der angeordneten Körper $(K_i, \leq_i)$, $i \in I$, entlang des Ultrafilters $\mathscr{U}$ nennen.

(c) Zeige, dass $\prod_{i\in I}(K_i, \leq_i)\Big/\mathscr{U}$ euklidisch ist, wenn $(K_i, \leq_i)$ für jedes $i \in I$ euklidisch ist.

(d) Zeige, dass $\prod_{i\in I}(K_i, \leq_i)\Big/\mathscr{U}$ reell abgeschlossen ist, wenn $(K_i, \leq_i)$ für jedes $i \in I$ reell abgeschlossen ist.

(e) Zeige, dass $\prod_{i\in I}(K_i, \leq_i)\Big/\mathscr{U}$ für abzählbares I genau dann archimedisch ist, wenn es ein (offenbar eindeutig bestimmtes) $i \in I$ mit $\mathscr{U} = \{J \mid i \in J \subseteq I\}$ gibt und $(K_i, \leq_i)$ archimedisch ist.

Abgabe bis Donnerstag, den 2. Mai, um 11:44 Uhr in die Zettelkästen neben F411.