Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Sommersemester 2013

Sebastian Gruler
María López Quijorna
Markus Schweighofer

Übungsblatt 21 zur Reellen Algebraischen Geometrie

Aufgabe 74. Finde einen endlichdimensionalen topologischen $\mathbb{Q}$-Vektorraum V und einen Kegel $C \subseteq V$ mit $C \neq \{0\}$ derart, dass jedes Element von $C \setminus \{0\}$ eine Einheit für C ist aber kein Element von C ein innerer Punkt von C ist.

Aufgabe 75. Sei K ein Unterkörper von $\mathbb{R}$ und V ein K-Vektorraum. Weiter seien A und B konvexe Teilmengen von V. Zeige:

(a) Ist F eine Seite von $A + B$, so gibt es eine Seite G von A und eine Seite H von B mit $F = G + H$.

(b) Ist F eine exponierte Seite von $A + B$, so gibt es eine exponierte Seite G von A und eine exponierte Seite H von B mit $F = G + H$.

Aufgabe 76. Seien A, B und C nichtleere konvexe Mengen im $\mathbb{R}^n$ und sei C kompakt. Zeige $A + C \subseteq B + C \implies A \subseteq B$.

Hinweis: Zeige, dass man sich auf den Fall beschränken kann, dass $A = \{a\}$ einelementig ist. Zeige dann mit Hilfe des Trennungssatzes für lokalkonvexe Vektorräume

$$a + C \subseteq B + C \implies a \in \overline{B}.$$

Wie kann man jetzt weitermachen?

Aufgabe 77. Sei R ein reell abgeschlossener Körper und seien $f, g \in R[X_1, \ldots, X_n]$ beide nichtnegativ auf R^n. Zeige dann $N(f + g) = \operatorname{conv}(N(f) \cup N(g))$.

Hinweis: Benutze Artins Lösung des 17. Hilbertschen Problems 2.5.3, die Rechenregeln für Newton-Polytope aus §2.4 und Aufgabe 76.

Abgabe bis Donnerstag, den 20. Juni, um 11:44 Uhr in die Zettelkästen neben F411.