Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Wintersemester 2014/2015

Christoph Hanselka
Markus Schweighofer

Einführung in die Algebra, Übungsblatt 6, Lösungsvorschlag

Aufgabe 3. Zeige: Ist $A[X]$ ein Hauptidealring, so ist A ein Körper.

Lösungsvorschlag. *Variante 1:* Wir betrachten den Ringhomomorphismus, der durch Auswertung in 0 gegeben ist, genauer: $\Psi\colon A[X] \to A$ mit $\Psi|_A = \mathrm{id}_A$ und $\Psi(X) = 0$ (siehe Korollar 2.2.8). Dieser ist offensichtlich surjektiv und nach dem Homomorphiesatz bekommen wir $A[X]/\ker\Psi \cong A$. Da A als Unterring eines Hauptidealringes ein Integritätsring ist, ist $\ker\Psi$ nach Aufgabe 2(a) ein Primideal. Da $X \in \ker\Psi$ ist dieses nicht das Nullideal. Da nach Vorraussetzung $A[X]$ ein Hauptidealring ist und in Hauptidealringen alle von Null verschiedenen Primideale maximal sind, ist also $\ker\Psi$ ein maximales Ideal und A nach Aufgabe 2(b) somit ein Körper.

Variante 2: Sei $a \in A \setminus \{0\}$. Wir zeigen $a \in A^\times$. Nach Voraussetzung ist $(a, X) \subseteq A[X]$ ein Hauptideal, also gibt es $f \in A[X]$ mit $(f) = (a, X)$. Da A ein Integritätsring ist, folgt wegen $f|a$ mit Korollar 2.2.14 , dass $\deg f = 0$, also $f \in A$ gilt. Wegen $f|X$ teilt der Leitkoeffizient von f, welcher f selbst ist, den Leitkoeffizienten von X, welcher 1 ist. Das bedeuted, dass $f \in A^\times$. Nun gilt außerdem $f \in (a, X)$, also gibt es Polynome $g, h \in A[X]$ mit $f = ga + hX$. Vergleichen wir die konstanten Terme auf beiden Seiten, so sehen wir, dass $f = g_0 a$ sein muss, wobei g_0 der konstante Term von g ist. Also gilt $a|f$ und da $f \in A^\times$ ist auch $a \in A^\times$.