Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Wintersemester 2014/2015

Christoph Hanselka
Markus Schweighofer

Übungsblatt 9 zur Einführung in die Algebra

Aufgabe 1. Sei K ein Körper, $n \in \mathbb{N}_0$ und $G \subseteq K[X_1, \dots, X_n]$. Zeige, dass es ein $m \in \mathbb{N}_0$ und $p_1, \dots, p_m \in G$ gibt mit

$$\{x \in K^n \mid \forall p \in G : p(x) = 0\} = \{x \in K^n \mid p_1(x) = \dots = p_m(x) = 0\}.$$

Aufgabe 2. Zeige mit dem Chinesischen Restsatz, dass für alle $m, n \in \mathbb{N}_0$ und alle paarweise verschiedenen $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ die lineare Abbildung

$$\begin{aligned} \mathbb{R}[X] &\to \mathbb{R}^{m \times n} \\ f &\mapsto (f^{(i-1)}(x_j))_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n} \end{aligned}$$

surjektiv ist, wobei $f^{(i-1)}(x_j)$ die $(i-1)$-te Ableitung von f an der Stelle x_j bezeichne.

Aufgabe 3.

(a) Seien A, B und C Mengen. Zeige: Die Zuordnungen

$$f \mapsto \left(\begin{array}{l} A \to C^B \\ a \mapsto \left(\begin{array}{l} B \to C \\ b \mapsto f(a,b) \end{array} \right) \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{l} A \times B \to C \\ (a,b) \mapsto (g(a))(b) \end{array} \right) \leftarrow\!\shortmid g$$

vermitteln eine Bijektion zwischen der Menge $C^{A \times B}$ der Abbildungen von $A \times B$ nach C und der Menge $(C^B)^A$ der Abbildungen von A nach C^B, wobei C^B die Menge der Abbildungen von B nach C ist.

(b) Sei G eine Gruppe und M eine Menge. Zeige: Die Zuordnungen

$$\cdot \mapsto \left(\begin{array}{l} G \to S_M \\ g \mapsto \left(\begin{array}{l} M \to M \\ x \mapsto g \cdot x \end{array} \right) \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{l} G \times M \to M \\ (g,x) \mapsto (\varphi(g))(x) \end{array} \right) \leftarrow\!\shortmid \varphi$$

vermitteln eine Bijektion zwischen der Menge der Wirkungen von G auf M und der Menge der Gruppenhomomorphismen von G nach S_M, wobei S_M die symmetrische Gruppe auf M ist.

Aufgabe 4. Sei G eine endliche Gruppe, die für jeden Primteiler p von $\#G$ genau eine p-Sylowgruppe besitzt. Zeige:

(a) G ist das direkte Produkt seiner Sylowgruppen. Mit anderen Worten: Sind $H_1, \ldots, H_m$ die paarweise verschiedenen Sylowgruppen von G, so ist

$$\begin{aligned} H_1 \times \cdots \times H_m &\to G \\ (h_1, \ldots, h_m) &\mapsto h_1 \cdots h_m \end{aligned}$$

ein Isomorphismus.

(b) G ist auflösbar.

Hinweis: Benutze 3.2.7(b) und betrachte den Kommutator $[a, b]$ für $a \in H_i$ und $b \in H_j$.

Aufgabe 5. Seien $p, q \in \mathbb{P}$ mit $p < q$ und sei G eine Gruppe der Ordnung pq. Zeige:

(a) G ist auflösbar.

(b) Ist p kein Teiler von $q - 1$, so ist G zyklisch.

(c) Es gibt bis auf Isomorphie genau eine Gruppe der Ordnung 15.

Hinweis: Benutze 2.8.7, 3.2.6, 3.2.7(b) und Aufgabe 4.

Abgabe bis Mittwoch, den 7. Januar, um 11:40 Uhr in die Zettelkästen neben F411. Dieses Übungsblatt wird an zwei Übungsterminen besprochen (7.–9. Januar und 14.–16. Januar). Es wird erst bis zum zweiten Übungstermin korrigiert.